

不定積分（置換・部分積分）

解答（全21問）

氏名 _____

得点 /21点

DRILL

練習問題（全16問）

基本（1～8）

1

x^α の公式

$$\int x^5 dx = \frac{1}{\mathcal{A}} x^6 + C \quad \text{の}\mathcal{A}\text{を求めよ。}$$

$$\mathcal{A} = \underline{6}$$

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$$

$$\mathcal{A} = 6$$

2

係数つき x^α の公式

$$\int 6x^2 dx = \text{ア} x^3 + C \quad \text{のアを求めよ。}$$

$$\text{ア} = \underline{2}$$

$$\int 6x^2 dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3} + C = 2x^3 + C$$

$$\text{ア} = 2$$

3

負の指数

$$\int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{\text{ア} x^2} + C \quad \text{のアを求めよ。}$$

$$\text{ア} = \underline{2}$$

$$\int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$$

$$\text{ア} = 2$$

4

 e^x の公式

$$\int 4e^x dx = \text{ア} e^x + C \quad \text{のアを求めよ。}$$

$$\text{ア} = \underline{4}$$

e^x の積分は e^x のまま。係数の4はそのまま前に出る。

$$\text{ア} = 4$$

5

 $1/x$ の公式

$$\int \frac{3}{x} dx = \text{ア} \ln |x| + C \quad \text{のアを求めよ。}$$

$$\text{ア} = \underline{3}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \quad \text{なので、係数の3がそのまま前に出る。}$$

$$\text{ア} = 3$$

6

 $\sin x$ の公式

$$\int 2 \sin x dx = -\text{ア} \cos x + C \quad \text{のアを求めよ。}$$

$$\text{ア} = \underline{2}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \text{なので、係数の2がそのまま前に出る。}$$

$$\text{ア} = 2$$

7

 $\cos x$ の公式

$$\int 5 \cos x dx = \text{ア} \sin x + C \quad \text{のアを求めよ。}$$

$$\text{ア} = \underline{5}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad \text{なので、係数の5がそのまま前に出る。}$$

$$\text{ア} = 5$$

8

1/cos²xの公式

$$\int \frac{3}{\cos^2 x} dx = \mathcal{A} \tan x + C \quad \text{の}\mathcal{A}\text{を求めよ。}$$

$$\mathcal{A} = \underline{3}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad \text{なので、係数の3がそのまま前に出る。}$$

$$\mathcal{A} = 3$$

標準 (9~14)

9

置換積分 (べき乗型)

$$\int 2x(x^2 + 1)^3 dx = \frac{(x^2 + 1)^{\mathcal{A}}}{\mathcal{I}} + C \quad \text{の}\mathcal{A} \cdot \mathcal{I}\text{を求めよ。}$$

$$\mathcal{A} = \underline{4} \quad \mathcal{I} = \underline{4}$$

$$u = x^2 + 1 \text{ とおくと } du = 2x dx. \text{ ちょうど } 2x dx \text{ が式の中にあるので}$$

$$\int 2x(x^2 + 1)^3 dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(x^2 + 1)^4}{4} + C$$

$$\mathcal{A} = 4, \mathcal{I} = 4$$

10

置換積分 (根号型)

$$\int x\sqrt{x^2 + 3} dx = \frac{1}{\mathcal{A}}(x^2 + 3)^{3/2} + C \quad \text{の}\mathcal{A}\text{を求めよ。}$$

$$\mathcal{A} = \underline{3}$$

$$u = x^2 + 3 \text{ とおくと } du = 2x dx, \text{ すなわち } x dx = \frac{1}{2} du.$$

$$\int x\sqrt{x^2 + 3} dx = \frac{1}{2} \int u^{1/2} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{1}{3} (x^2 + 3)^{3/2} + C$$

$$\mathcal{A} = 3$$

11

部分積分 (x・e^x型)

$$\int x e^x dx = (x - \text{ア})e^x + C \quad \text{のアを求めよ。}$$

$$\text{ア} = \underline{1}$$

$$f(x) = x, g'(x) = e^x \text{ と選ぶと } \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = (x - 1)e^x + C$$

$$\text{ア} = 1$$

12

部分積分 (係数つき)

$$\int 2x e^x dx = \text{ア}(x - \text{イ})e^x + C \quad \text{のア・イを求めよ。}$$

$$\text{ア} = \underline{2} \quad \text{イ} = \underline{1}$$

$$\int 2x e^x dx = 2 \int x e^x dx = 2(x - 1)e^x + C$$

$$\text{ア} = 2, \text{イ} = 1$$

13

部分積分 (ln x型)

$$\int \ln x dx = x \ln x - \text{ア}x + C \quad \text{のアを求めよ。}$$

$$\text{ア} = \underline{1}$$

$$f(x) = \ln x, g'(x) = 1 \text{ と選ぶと } \int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C$$

$$\text{ア} = 1$$

14

部分分数分解

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{\text{ア}} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \quad \text{のアを求めよ。}$$

$$\text{ア} = \underline{2}$$

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) \quad \text{と分解できるので}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln |x-1| - \frac{1}{2} \ln |x+1| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

$$\text{ア} = 2$$

挑戦 (15~16)

15

半角公式

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{\text{ア}} - \frac{\sin 2x}{\text{イ}} + C \quad \text{のア・イを求めよ。}$$

$$\text{ア} = \underline{2} \quad \text{イ} = \underline{4}$$

$$\text{半角公式より } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}。$$

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2} + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

$$\text{ア} = 2、\text{イ} = 4$$

$$\int x^2 e^x dx = (x^2 - \mathcal{A}x + \mathcal{I})e^x + C \quad \text{の}\mathcal{A} \cdot \mathcal{I}\text{を求めよ。}$$

$$\mathcal{A} = \underline{2} \quad \mathcal{I} = \underline{2}$$

$f(x) = x^2, g'(x) = e^x$ と選ぶと

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$$

問題12の結果 $\int 2x e^x dx = 2(x-1)e^x + C$ を使うと

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x-1)e^x + C = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

$$\mathcal{A} = 2, \mathcal{I} = 2$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。2回の部分積分・置換と部分積分の組み合わせなど、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

部分積分を2回使って同じ式に戻す

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{\text{ア}} + C \quad \text{のアを求めよ。}$$

$$\text{ア} = \underline{\underline{2}}$$

$I = \int e^x \sin x \, dx$ とおく。 $f(x) = \sin x$, $g'(x) = e^x$ で部分積分すると

$$I = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

右辺の $\int e^x \cos x \, dx$ も同様に $f(x) = \cos x$, $g'(x) = e^x$ で部分積分すると

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx = e^x \cos x + I$$

これを最初の式に代入すると

$$I = e^x \sin x - (e^x \cos x + I) = e^x \sin x - e^x \cos x - I$$

$$2I = e^x \sin x - e^x \cos x$$

$$I = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$$

（右辺に同じ I が出てきたら、方程式として解いて I を求めるのがこのタイプの決め手）

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$$

応2

tanxを置換積分で求める

$$\int \tan x \, dx = \text{ア} \ln |\cos x| + C \quad \text{のアを求めよ。}$$

$$\text{ア} = \underline{-1}$$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ なので、まず $\sin x$, $\cos x$ の分数の形に直す。

$u = \cos x$ とおくと $du = -\sin x \, dx$ 、すなわち $\sin x \, dx = -du$ 。

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int \frac{-du}{u} = -\ln |u| + C = -\ln |\cos x| + C$$

(分母にくる関数を u とおくのが分数形の置換積分の基本パターン)

$$\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C$$

応3

部分積分をくり返す漸化式的な考え方

問題16の結果 $\int x^2 e^x \, dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$ を使って、 $\int x^3 e^x \, dx = (x^3 + \text{ア} x^2 + 6x + \text{イ})e^x + C$ のア・イを求めよ。

$$\text{ア} = \underline{-3} \quad \text{イ} = \underline{-6}$$

$x^n e^x$ の積分は、部分積分を1回行うたびに次数が1つ下がった $x^{n-1} e^x$ の積分に帰着する (このくり返しの関係を漸化式という)。

一般に $I_n = \int x^n e^x \, dx$ とおくと $f(x) = x^n$, $g'(x) = e^x$ の部分積分により

$$I_n = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx = x^n e^x - n I_{n-1}$$

今回は $n = 3$ 。 $I_2 = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$ (問題16の結果) を使うと

$$\begin{aligned} I_3 &= x^3 e^x - 3I_2 = x^3 e^x - 3(x^2 - 2x + 2)e^x = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C \end{aligned}$$

ア = -3、イ = -6 (このように次数を1つずつ下げてくり返す発想を漸化式的積分という)

応4

部分分数分解（分子が定数でない）

$\int \frac{x+3}{(x-1)(x+2)} dx = \frac{\text{ア}}{3} \ln|x-1| + \frac{\text{イ}}{3} \ln|x+2| + C$ のア・イを求めよ。

ア= 4 イ= -1

$\frac{x+3}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$ とおく。両辺に $(x-1)(x+2)$ をかけて
 $x+3 = A(x+2) + B(x-1)$
 $x=1$ を代入： $4=3A$ より $A=\frac{4}{3}$ 。 $x=-2$ を代入： $1=-3B$ より $B=-\frac{1}{3}$

。
 $\int \frac{x+3}{(x-1)(x+2)} dx = \frac{4}{3} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{4}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + C$

$\int \frac{x+3}{(x-1)(x+2)} dx = \frac{4}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + C$

応5

部分積分（ $x \cdot \ln x$ 型）

$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{\text{ア}} \ln x - \frac{x^2}{\text{イ}} + C$ のア・イを求めよ。

ア= 2 イ= 4

$f(x) = \ln x, g'(x) = x$ と選ぶと $f'(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \frac{x^2}{2}$ 。
 $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C$

$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$