

積分法 まとめ

問題プリント（全27問）

氏名 _____

得点 /27点

DRILL

まとめテスト（標準）

基本（1～15）

1 不定積分の基本公式（総合）

$\int \left(6x^2 - \frac{1}{x} + 3e^x \right) dx$ を求めよ（ C は省略してよい）。 x^3 の係数、 $\ln|x|$ の係数、 e^x の係数をそれぞれ求めよ。

x^3 の係数 $\ln|x|$ の係数
 e^x の係数

2 $1/x$ と $\sin x$ の公式（総合）

$\int \left(\frac{5}{x} - 2 \sin x \right) dx$ を求めよ（ C は省略してよい）。 $\ln|x|$ の係数、 $\cos x$ の係数をそれぞれ求めよ。

$\ln|x|$ の係数 $\cos x$ の係数

3 置換積分（べき乗型・定積分）

$\int_0^1 6x(x^2 + 2)^2 dx$ を求めよ。

値

4 置換積分（根号型・定積分）

$\int_0^4 x\sqrt{x^2 + 9} dx$ を求めよ。

値

5 部分積分（ $x \cdot e^x$ 型・定積分）

$\int_0^1 3xe^x dx$ を求めよ。

値

6 部分積分（ $\ln x$ 型・係数つき・定積分）

$\int_1^{e^2} 2 \ln x dx$ を求めよ。

値

7 半角公式（定積分）

$\int_0^\pi \cos^2 x dx$ を求めよ。

値

8 曲線の長さ（直線での確認）

直線 $y = 3x - 2$ ($0 \leq x \leq 2$) の長さ L を、曲線の長さの公式を使って求めよ。

$L =$

9 部分分数分解

$\int \frac{1}{x^2 - 9} dx = \frac{1}{A} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C$ の A を求めよ。

$A =$

10

仮分数形の割り算

$$\int \frac{x^2}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} + \text{ア} x + \ln|x+1| + C$$

のアを求めよ。

ア =

11

奇関数の性質

$$\int_{-3}^3 (5x^3 - 2x) dx \text{ を求めよ。}$$

値

12

区分求積法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3k^2}{n^3} \text{ を求めよ。}$$

値

13

絶対値つきの定積分

$$\int_0^2 |x-1| dx \text{ を求めよ。}$$

値

14

曲線とx軸の間の面積

曲線 $y = e^x$ と x 軸、 y 軸、および直線 $x = 2$ で囲まれた部分の面積 S ($0 \leq x \leq 2$) を求めよ。

 $S =$

15

回転体の体積 (円錐型の確認)

直線 $y = 2x$ ($0 \leq x \leq 3$) を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は $V = \text{ア} \pi$ と表せる。アを求めよ。

ア =

発展 (16~25)

16

部分積分を2回使う (定積分)

$$\int_0^\pi x^2 \sin x dx \text{ を求めよ。}$$

値

17

仮分数形+置換の複合

$$\int \frac{x^3}{x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{\text{ア}} \ln(x^2+1) + C$$

のアを求めよ。

ア =

18

2曲線の間を回転 (外側²-内側²)

曲線 $y = x$ と $y = x^3$ で囲まれた部分 ($0 \leq x \leq 1$) を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は $V = \frac{\text{ア}}{21} \pi$ と表せる。アを求めよ。

ア =

19

y軸回転の体積

曲線 $y = x^2$ ($x \geq 0$) と y 軸、直線 $y = 3$ で囲まれた部分を、 y 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は $V = \frac{\text{ア}}{2} \pi$ と表せる。アを求めよ。

ア =

20

曲線の長さ ($1+(y')^2$ が平方の形になる工夫)

曲線 $y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}$ ($1 \leq x \leq 2$) の長さ L を求めよ。

 $L =$

21

接線を求めてから面積へ

曲線 $y = e^x$ の $x = 1$ における接線を求めよ。
また、この接線と曲線 $y = e^x$ 、 y 軸で囲まれた部分の面積 S ($0 \leq x \leq 1$) を求めよ。

接線の式 $y =$ x $S =$

22

区分求積法 (三角関数)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{k\pi}{2n} \text{ を求めよ。}$$

値

23

部分積分を2回使う (($\ln x$)²型)

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx \text{ を求めよ。}$$

値

24

奇関数・偶関数の分離 (計算せずに0と見抜く)

$$\int_{-1}^1 (x^3 e^{x^2} + 6x^2) dx \text{ を求めよ。}$$

値

25

総合問題：面積を求めてから体積へ (章の総仕上げ)

曲線 $y = \sqrt{x}$ と直線 $y = \frac{x}{2}$ で囲まれた部分の面積 S ($0 \leq x \leq 4$) を求めよ。また、この部分を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は $V = \frac{\text{ア}}{3}\pi$ と表せる。 S とアを求めよ。

 $S =$

ア=

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1

この章で学んだ面積・体積・曲線の長さの3つの公式は、見た目こそ違うが、どれも同じ発想にもとづいている。面積の場合を例にとって、その共通の発想を説明せよ。

記2

不定積分の置換積分と部分積分は、それぞれどのような形の式を見たときに使うべきか、判断の基準を説明せよ。そのうえで、

$\int x\sqrt{2x+1} dx$ を実際に置換積分で求め、答案として仕上げよ。

E X A M
共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 8分/配点 20点

太郎さんは、自転車で走ったときの速さを記録した。出発してから t 秒後の速さが $v(t) = 6 - t$ (m/秒) ($0 \leq t \leq 6$) で表されるとき、出発してから進んだ距離について、花子さんと一緒に考えている。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

花子「速さ $v(t)$ を t で積分すると、出発してから進んだ距離が分かるね。」

太郎「じゃあ、まず不定積分から求めてみよう。」

(1)

出発してから t 秒後までに進んだ距離を $x(t) = \int_0^t v(u) du$ とすると

$$x(t) = \boxed{\text{ア}} t - \frac{t^2}{\boxed{\text{イ}}}$$

となる。ア、イを求めよ。

ア イ

(2)

花子「速さが0になるのはいつですか。」 $v(t) = 0$ となるのは $t = 6$ のとき（ちょうど記録の終わりの時刻）である。(1)の結果を使うと、出発してから6秒後までに進んだ距離は $x(6) = \boxed{\text{ウエ}}$ mである。ウエを求めよ。

ウエ

(3)

太郎「積分で求めた距離は、 vt グラフと t 軸で囲まれた面積とも一致するはずだね。」 $v(t) = 6 - t$ は直線なので、 vt グラフと t 軸・直線 $t = 6$ で囲まれた部分は、底辺 $\boxed{\text{オ}}$ 、高さ $\boxed{\text{カ}}$ の直角三角形になる。この面積は $\boxed{\text{キク}}$ であり、(2)の結果と一致することが確認できる。オ、カ、キクを求めよ。

オ カ キク

大問2 目標時間 8分/配点 20点

花子さんは陶芸教室で湯呑みを作るために、ろくろで回転させる断面の形を考えている。断面の半径は、底からの高さ x cm ($1 \leq x \leq 3$) の位置で $r(x) = x + 1$ (cm) になるように設計した。この形をろくろで回転させてできる立体の体積 V を、先生と一緒に2通りの方法で計算して確かめている。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「体積は $V = \pi \int_1^3 (x + 1)^2 dx$ で求められるね。まずは置換積分で計算してみよう。」

(1) $u = x + 1$ において置換積分すると、積分区間は $u = \boxed{\text{ア}}$ から $u = \boxed{\text{イ}}$ に変わる。ア、イを求めよ。

ア イ

(2) この置換を使って計算すると、体積は $V = \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}} \pi$ (cm³) となる。ウエ、オを求めよ。

ウエ オ

(3) 先生「置換を使わずに、直接展開して積分しても確かめられるよ。」 $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ を直接積分すると

$$V = \pi \left[\frac{x^3}{\boxed{\text{カ}}} + x^2 + x \right]_1^3$$

となり、(2)と同じ値になることが確認できる。カを求めよ。

カ