

積分法 まとめ

問題プリント（全27問）

氏名 _____

得点 _____ / 27点

DRILL

まとめテスト（標準）

基本（1～15）

1

不定積分の基本公式（総合）

$\int \left(6x^2 - \frac{1}{x} + 3e^x \right) dx$ を求めよ（ C は省略してよい）。 x^3 の係数、 $\ln|x|$ の係数、 e^x の係数をそれぞれ求めよ。

x^3 の係数

$\ln|x|$ の係数

e^x の係数

計算スペース

2

1/xとsinxの公式（総合）

$\int \left(\frac{5}{x} - 2 \sin x \right) dx$ を求めよ（ C は省略してよい）。 $\ln |x|$ の係数、 $\cos x$ の係数をそれぞれ求めよ。

 $\ln |x|$ の係数 $\cos x$ の係数

計算スペース

3

置換積分（べき乗型・定積分）

$\int_0^1 6x(x^2 + 2)^2 dx$ を求めよ。

値

計算スペース

4

置換積分（根号型・定積分）

$$\int_0^4 x \sqrt{x^2 + 9} dx \text{ を求めよ。}$$

値

計算スペース

5

部分積分（ $x \cdot e^x$ 型・定積分）

$$\int_0^1 3xe^x dx \text{ を求めよ。}$$

値

計算スペース

6

部分積分 (ln x型・係数つき・定積分)

$$\int_1^{e^2} 2 \ln x \, dx \text{ を求めよ。}$$

値

計算スペース

7

半角公式 (定積分)

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx \text{ を求めよ。}$$

値

計算スペース

8

曲線の長さ（直線での確認）

直線 $y = 3x - 2$ ($0 \leq x \leq 2$) の長さ L を、曲線の長さの公式を使って求めよ。

$$L = \boxed{}$$

計算スペース

9

部分分数分解

$$\int \frac{1}{x^2 - 9} dx = \frac{1}{A} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C \quad \text{の } A \text{ を求めよ。}$$

$$A = \boxed{}$$

計算スペース

10

仮分数形の割り算

$$\int \frac{x^2}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} + \text{ア} x + \ln|x+1| + C \quad \text{のアを求めよ。}$$

ア=

計算スペース

11

奇関数の性質

$$\int_{-3}^3 (5x^3 - 2x) dx \text{ を求めよ。}$$

値

計算スペース

12

区分求積法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3k^2}{n^3} \text{ を求めよ。}$$

値

計算スペース

13

絶対値付きの定積分

$$\int_0^2 |x - 1| dx \text{ を求めよ。}$$

値

計算スペース

14

曲線とx軸の間の面積

曲線 $y = e^x$ と x 軸、 y 軸、および直線 $x = 2$ で囲まれた部分の面積 S ($0 \leq x \leq 2$) を求めよ。

 $S =$

計算スペース

15

回転体の体積（円錐型の確認）

直線 $y = 2x$ ($0 \leq x \leq 3$) を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は $V = \text{ア} \pi$ と表せる。アを求めよ。

ア=

計算スペース

発展 (16~25)

16

部分積分を2回使う (定積分)

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx \text{ を求めよ。}$$

値

計算スペース

17

仮分数形+置換の複合

$$\int \frac{x^3}{x^2 + 1} \, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{\mathcal{A}} \ln(x^2 + 1) + C \text{ の } \mathcal{A} \text{ を求めよ。}$$

$\mathcal{A} =$

計算スペース

18

2曲線の間を回転（外側²–内側²）

曲線 $y = x$ と $y = x^3$ で囲まれた部分（ $0 \leq x \leq 1$ ）を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は $V = \frac{\text{ア}}{21}\pi$ と表せる。アを求めよ。

ア=

計算スペース

19

y軸回転の体積

曲線 $y = x^2$ （ $x \geq 0$ ）と y 軸、直線 $y = 3$ で囲まれた部分を、 y 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は $V = \frac{\text{ア}}{2}\pi$ と表せる。アを求めよ。

ア=

計算スペース

20

曲線の長さ $(1+(y')^2)$ が平方の形になる工夫

曲線 $y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}$ ($1 \leq x \leq 2$) の長さ L を求めよ。

$L =$

計算スペース

21

接線を求めてから面積へ

曲線 $y = e^x$ の $x = 1$ における接線を求めよ。また、この接線と曲線 $y = e^x$ 、 y 軸で囲まれた部分の面積 S ($0 \leq x \leq 1$) を求めよ。

接線の式 $y =$ x $S =$

計算スペース

22

区分求積法（三角関数）

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{k\pi}{2n} \text{ を求めよ。}$$

値

計算スペース

23

部分積分を2回使う（ $(\ln x)^2$ 型）

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx \text{ を求めよ。}$$

値

計算スペース

24

奇関数・偶関数の分離（計算せずに0と見抜く）

$$\int_{-1}^1 (x^3 e^{x^2} + 6x^2) dx \text{ を求めよ。}$$

値

計算スペース

25

総合問題：面積を求めてから体積へ（章の総仕上げ）

曲線 $y = \sqrt{x}$ と直線 $y = \frac{x}{2}$ で囲まれた部分の面積 S ($0 \leq x \leq 4$) を求めよ。

また、この部分を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は $V = \frac{\text{ア}}{3}\pi$ と表せる。 S とアを求めよ。

 $S =$

ア=

計算スペース

記述チャレンジ

記1 この章で学んだ面積・体積・曲線の長さの3つの公式は、見た目こそ違うが、どれも同じ発想にもとづいている。面積の場合を例にとって、その共通の発想を説明せよ。

[illegible]

EXAM

共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 8分/配点 20点

太郎さんは、自転車で走ったときの速さを記録した。出発してから t 秒後の速さが $v(t) = 6 - t$ (m/秒) ($0 \leq t \leq 6$) で表されるとき、出発してから進んだ距離について、花子さんと一緒に考えている。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

花子「速さ $v(t)$ を t で積分すると、出発してから進んだ距離が分かるね。」

太郎「じゃあ、まず不定積分から求めてみよう。」

(1)

出発してから t 秒後までに進んだ距離を $x(t) = \int_0^t v(u) du$ とすると

$$x(t) = \boxed{\text{ア}} t - \frac{t^2}{\boxed{\text{イ}}}$$

となる。ア、イを求めよ。

ア イ

(2)

花子「速さが0になるのはいつですか。」 $v(t) = 0$ となるのは $t = 6$ のとき（ちょうど記録の終わりの時刻）である。(1)の結果を使うと、出発してから6秒後までに進んだ距離は $x(6) = \boxed{\text{ウエ}}$ mである。ウエを求めよ。

ウエ

(3)

太郎「積分で求めた距離は、 vt グラフと t 軸で囲まれた面積とも一致するはずだね。」 $v(t) = 6 - t$ は直線なので、 vt グラフと t 軸・直線 $t = 6$ で囲まれた部分は、底辺 $\boxed{\text{オ}}$ 、高さ $\boxed{\text{カ}}$ の直角三角形になる。この面積は $\boxed{\text{キク}}$ であり、(2)の

結果と一致することが確認できる。オ、カ、キクを求めよ。

オ カ キク

大問2 目標時間 8分／配点 20点

花子さんは陶芸教室で湯呑みを作るために、ろくろで回転させる断面の形を考えている。断面の半径は、底からの高さ x cm ($1 \leq x \leq 3$) の位置で $r(x) = x + 1$ (cm) になるように設計した。この形をろくろで回転させてできる立体の体積 V を、先生と一緒に2通りの方法で計算して確かめている。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「体積は $V = \pi \int_1^3 (x + 1)^2 dx$ で求められるね。まずは置換積分で計算してみよう。」

- (1) $u = x + 1$ において置換積分すると、積分区間は $u = \boxed{\text{ア}}$ から $u = \boxed{\text{イ}}$ になる。ア、イを求めよ。

ア イ

- (2) この置換を使って計算すると、体積は $V = \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$ となる。ウエ、オを求めよ。

ウエ オ

- (3) 先生「置換を使わずに、直接展開して積分しても確かめられるよ。」 $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ を直接積分すると

$$V = \pi \left[\frac{x^3}{\boxed{\text{カ}}} + x^2 + x \right]_1^3$$

となり、(2)と同じ値になることが確認できる。カを求めよ。

力