

積分法 まとめ

解答（全27問）

氏名 _____

得点 _____ / 27点

DRILL

まとめテスト（標準）

基本（1～15）

1

不定積分の基本公式（総合）

$\int \left(6x^2 - \frac{1}{x} + 3e^x \right) dx$ を求めよ（ C は省略してよい）。 x^3 の係数、 $\ln|x|$ の係数、 e^x の係数をそれぞれ求めよ。

x^3 の係数 2 $\ln|x|$ の係数 -1 e^x の係数 3

各項を公式にあてはめる。

$$\int 6x^2 dx = 2x^3, \int \left(-\frac{1}{x} \right) dx = -\ln|x|, \int 3e^x dx = 3e^x$$

$2x^3 - \ln|x| + 3e^x$ (x^3 の係数2、 $\ln|x|$ の係数-1、 e^x の係数3)

2

1/xとsinxの公式（総合）

$\int \left(\frac{5}{x} - 2 \sin x \right) dx$ を求めよ（ C は省略してよい）。 $\ln |x|$ の係数、 $\cos x$ の係数をそれぞれ求めよ。

$\ln |x|$ の係数 5 $\cos x$ の係数 2

$$\int \frac{5}{x} dx = 5 \ln |x|, \quad \int (-2 \sin x) dx = -2 \times (-\cos x) = 2 \cos x$$

$5 \ln |x| + 2 \cos x$ ($\ln |x|$ の係数5、 $\cos x$ の係数2)

3

置換積分（べき乗型・定積分）

$\int_0^1 6x(x^2 + 2)^2 dx$ を求めよ。

値 19

$u = x^2 + 2$ とおくと $du = 2x dx$ 、すなわち $6x dx = 3 du$ 。 $x : 0 \rightarrow 1$ のとき $u : 2 \rightarrow 3$ 。

$$\int_0^1 6x(x^2 + 2)^2 dx = \int_2^3 3u^2 du = \left[u^3 \right]_2^3 = 27 - 8 = 19$$

19

4

置換積分（根号型・定積分）

$$\int_0^4 x \sqrt{x^2 + 9} dx \text{ を求めよ。}$$

値 98/3

$u = x^2 + 9$ とおくと $du = 2x dx$ 、すなわち $x dx = \frac{1}{2}du$ 。 $x : 0 \rightarrow 4$ のとき $u : 9 \rightarrow 25$ 。

$$\int_0^4 x \sqrt{x^2 + 9} dx = \int_9^{25} \frac{1}{2} u^{1/2} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{3/2} \right]_9^{25} = \frac{1}{3} (125 - 27) = \frac{98}{3}$$

$$\frac{98}{3}$$

5

部分積分（ $x \cdot e^x$ 型・定積分）

$$\int_0^1 3xe^x dx \text{ を求めよ。}$$

値 3

$f(x) = x, g'(x) = e^x$ と選ぶと $\int xe^x dx = (x - 1)e^x + C$ なので

$$\int_0^1 3xe^x dx = \left[3(x - 1)e^x \right]_0^1 = 3(0 \cdot e) - 3(-1 \cdot 1) = 0 - (-3) = 3$$

$$3$$

6

部分積分 (ln x型・係数つき・定積分)

$\int_1^{e^2} 2 \ln x \, dx$ を求めよ。

値 $2e^2 + 2$

$f(x) = \ln x$, $g'(x) = 1$ と選ぶと $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$ なので

$$\int_1^{e^2} 2 \ln x \, dx = \left[2(x \ln x - x) \right]_1^{e^2} = 2\{(2e^2 - e^2) - (0 - 1)\} = 2(e^2 + 1) = 2e^2 + 2$$

$$2e^2 + 2$$

7

半角公式 (定積分)

$\int_0^\pi \cos^2 x \, dx$ を求めよ。

値 $\pi/2$

半角公式 $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ を使う。

$$\int_0^\pi \cos^2 x \, dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^\pi = \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2}$$

直線 $y = 3x - 2$ ($0 \leq x \leq 2$) の長さ L を、曲線の長さの公式を使って求めよ。

$$L = \underline{2\sqrt{10}}$$

$$y' = 3 \text{ より } 1 + (y')^2 = 1 + 9 = 10.$$

$$L = \int_0^2 \sqrt{10} dx = 2\sqrt{10}$$

(2点 $(0, -2)$ 、 $(2, 4)$ 間の距離 $\sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ と一致し、公式が正しいことを確認できる。)

$$L = 2\sqrt{10}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 9} dx = \frac{1}{\mathcal{A}} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C \quad \text{の } \mathcal{A} \text{ を求めよ。}$$

$$\mathcal{A} = \underline{6}$$

$$\frac{1}{x^2 - 9} = \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} \right) \text{ と分解できるので}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 9} dx = \frac{1}{6} \ln |x-3| - \frac{1}{6} \ln |x+3| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C$$

$$\mathcal{A} = 6$$

10

仮分数形の割り算

$$\int \frac{x^2}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} + \mathcal{A}x + \ln|x+1| + C \quad \text{の}\mathcal{A}\text{を求めよ。}$$

$$\mathcal{A} = \underline{-1}$$

$$x^2 = (x+1)(x-1) + 1 \text{ より } \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}。$$

$$\int \frac{x^2}{x+1} dx = \int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C$$

$$\mathcal{A} = -1$$

11

奇関数の性質

$$\int_{-3}^3 (5x^3 - 2x) dx \text{ を求めよ。}$$

$$\text{値 } \underline{0}$$

$f(x) = 5x^3 - 2x$ は $f(-x) = -5x^3 + 2x = -f(x)$ より奇関数。区間が原点对称なので、計算するまでもなく積分は0。

$$0$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3k^2}{n^3}$ を求めよ。

値 1

和の形を「 $\frac{1}{n} \times (k/n \text{ だけの式})$ 」に整理する。

$$\sum_{k=1}^n \frac{3k^2}{n^3} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 3 \left(\frac{k}{n} \right)^2$$

これは $f(x) = 3x^2$ として $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ の形になっているので、極限は

$$\int_0^1 3x^2 dx = \left[x^3 \right]_0^1 = 1 \text{ に一致する。}$$

1

$\int_0^2 |x-1| dx$ を求めよ。

値 1

$x=1$ で符号が変わるので区間を分割する。 $0 \leq x \leq 1$ では $|x-1| = 1-x$ 、 $1 \leq x \leq 2$ では $|x-1| = x-1$ 。

$$\int_0^1 (1-x) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_1^2 (x-1) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 = 0 - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{合計は } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

1

14

曲線とx軸の間の面積

曲線 $y = e^x$ と x 軸、 y 軸、および直線 $x = 2$ で囲まれた部分の面積 S ($0 \leq x \leq 2$) を求めよ。

$$S = \underline{e^2 - 1}$$

$e^x \geq 0$ なので、そのまま積分すればよい。

$$S = \int_0^2 e^x dx = \left[e^x \right]_0^2 = e^2 - 1$$

$$S = e^2 - 1$$

15

回転体の体積（円錐型の確認）

直線 $y = 2x$ ($0 \leq x \leq 3$) を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は $V = \text{ア} \pi$ と表せる。アを求めよ。

$$\text{ア} = \underline{36}$$

$$V = \pi \int_0^3 (2x)^2 dx = \pi \int_0^3 4x^2 dx = \pi \left[\frac{4x^3}{3} \right]_0^3 = \pi \times 4 \times 9 = 36\pi$$

$$\text{ア} = 36$$

16

部分積分を2回使う (定積分)

$\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx$ を求めよ。

値 $\pi^2 - 4$

$f(x) = x^2$, $g'(x) = \sin x$ と選んで部分積分する。

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx$$

$$\int 2x \cos x \, dx = 2x \sin x - \int 2 \sin x \, dx = 2x \sin x + 2 \cos x$$

$$\text{合わせると } \int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

これに端点を代入する。

$$x = \pi : -\pi^2(-1) + 2\pi \cdot 0 + 2(-1) = \pi^2 - 2$$

$$x = 0 : -0 + 0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx = (\pi^2 - 2) - 2 = \pi^2 - 4$$

17

仮分数形+置換の複合

$\int \frac{x^3}{x^2 + 1} \, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{\mathcal{A}} \ln(x^2 + 1) + C$ の $\mathcal{A}$ を求めよ。

$\mathcal{A} =$ 2

まず仮分数の割り算をする。 $x^3 = x(x^2 + 1) - x$ より $\frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$ 。

右側の $\int \frac{x}{x^2 + 1} \, dx$ は $u = x^2 + 1$ ($du = 2x \, dx$) と置換すると $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$ になる ($x^2 + 1 > 0$ なので絶対値は不要)。

$$\int \frac{x^3}{x^2 + 1} \, dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2 + 1} \right) \, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

$\mathcal{A} = 2$

18

2曲線の間を回転（外側²–内側²）

曲線 $y = x$ と $y = x^3$ で囲まれた部分 ($0 \leq x \leq 1$) を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は $V = \frac{\text{ア}}{21}\pi$ と表せる。アを求めよ。

ア= 4

$0 \leq x \leq 1$ では $x \geq x^3$ なので、外側の半径が x 、内側の半径が x^3 。

$$V = \pi \int_0^1 [x^2 - (x^3)^2] dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^6) dx = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) = \pi \times \frac{7-3}{21} = \frac{4}{21}\pi$$

ア = 4

19

y軸回転の体積

曲線 $y = x^2$ ($x \geq 0$) と y 軸、直線 $y = 3$ で囲まれた部分を、 y 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は $V = \frac{\text{ア}}{2}\pi$ と表せる。アを求めよ。

ア= 9

$y = x^2$ ($x \geq 0$) を x について解くと $x^2 = y$ 。

$$V = \pi \int_0^3 x^2 dy = \pi \int_0^3 y dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^3 = \frac{9}{2}\pi$$

ア = 9

曲線 $y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}$ ($1 \leq x \leq 2$) の長さ L を求めよ。

$$L = \underline{\underline{33/16}}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x^3}{2} - \frac{1}{2x^3} \\ (y')^2 &= \frac{x^6}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^6}, \text{ よって } 1 + (y')^2 = \frac{x^6}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^6} = \left(\frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x^3} \right)^2 \\ x > 0 \text{ なので } \sqrt{1 + (y')^2} &= \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x^3} \\ L &= \int_1^2 \left(\frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x^3} \right) dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{1}{4x^2} \right]_1^2 \\ x = 2 \text{ を代入: } \frac{16}{8} - \frac{1}{16} &= 2 - \frac{1}{16} = \frac{31}{16} \quad x = 1 \text{ を代入: } \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8} = -\frac{2}{16} \\ L &= \frac{31}{16} - \left(-\frac{2}{16} \right) = \frac{33}{16} \\ L &= \underline{\underline{\frac{33}{16}}} \end{aligned}$$

曲線 $y = e^x$ の $x = 1$ における接線を求めよ。また、この接線と曲線 $y = e^x$ 、 y 軸で囲まれた部分の面積 S ($0 \leq x \leq 1$) を求めよ。

$$\text{接線の式 } y = \underline{\underline{e}} x \quad S = \underline{\underline{e/2-1}}$$

$y' = e^x$ より、 $x = 1$ での傾きは $e^1 = e$ 。接点は $(1, e)$ なので接線は $y - e = e(x - 1)$ すなわち $y = ex$ (原点を通る直線になる)

e^x は下に凸 (つねに接線より上) なので、 $0 \leq x \leq 1$ で $e^x \geq ex$ 。

$$S = \int_0^1 (e^x - ex) dx = \left[e^x - \frac{ex^2}{2} \right]_0^1 = \left(e - \frac{e}{2} \right) - (1 - 0) = \frac{e}{2} - 1$$

$$\text{接線は } y = ex, \text{ 面積 } S = \underline{\underline{\frac{e}{2} - 1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{k\pi}{2n} \text{ を求めよ。}$$

値 $2/\pi$

$\frac{1}{n} \sin \frac{k\pi}{2n}$ は $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ として $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ の形になっているので、 $n \rightarrow \infty$ の極限

は $\int_0^1 \sin \frac{\pi x}{2} dx$ に一致する。

$$\int_0^1 \sin \frac{\pi x}{2} dx = \left[-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2} \right]_0^1 = -\frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = -\frac{2}{\pi} (0 - 1) = \frac{2}{\pi}$$

$$\frac{2}{\pi}$$

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx \text{ を求めよ。}$$

値 $e-2$

$f(x) = (\ln x)^2$, $g'(x) = 1$ と選ぶ ($f'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$, $g(x) = x$)。

$$\begin{aligned} \int (\ln x)^2 dx &= x(\ln x)^2 - \int 2 \ln x dx = x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + C = \\ &= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C \end{aligned}$$

端点を代入する。

$$x = e : e \cdot 1^2 - 2e \cdot 1 + 2e = e - 2e + 2e = e$$

$$x = 1 : 1 \cdot 0^2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$$

$\int_{-1}^1 (x^3 e^{x^2} + 6x^2) dx$ を求めよ。

値 4

和の積分は分けて計算できるので、まず2つの項の偶奇を確認する。

$x^3 e^{x^2}$: x^3 は奇関数、 e^{x^2} は偶関数なので、積は奇関数×偶関数＝奇関数。区間 $[-1, 1]$ は原点对称なので、この項の積分は原始関数を求めなくても計算するまでもなく0。

$$6x^2 : \text{偶関数なので} \int_{-1}^1 6x^2 dx = 2 \int_0^1 6x^2 dx = 2 \left[2x^3 \right]_0^1 = 2 \times 2 = 4$$

$$\text{合計すると} \int_{-1}^1 (x^3 e^{x^2} + 6x^2) dx = 0 + 4 = 4$$

4

曲線 $y = \sqrt{x}$ と直線 $y = \frac{x}{2}$ で囲まれた部分の面積 S ($0 \leq x \leq 4$) を求めよ。
 また、この部分を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は $V = \frac{\mathcal{A}}{3}\pi$ と表せる。 S と $\mathcal{A}$ を求めよ。

$$S = \underline{\underline{4/3}} \quad \mathcal{A} = \underline{\underline{8}}$$

交点を求める。 $\sqrt{x} = \frac{x}{2}$ の両辺を2乗すると $x = \frac{x^2}{4}$ 、 $4x = x^2$ 、 $x(x-4) = 0$ より
 $x = 0, 4$ 。

$x = 1$ で確認すると $\sqrt{1} = 1 > 0.5 = \frac{1}{2}$ なので、 $0 \leq x \leq 4$ では $\sqrt{x} \geq \frac{x}{2}$ 。

面積は

$$S = \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2} \right) dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{4} \right]_0^4 = \frac{2}{3} \times 8 - \frac{16}{4} = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$$

体積は、外側の半径が $\sqrt{x}$ （曲線）、内側の半径が $\frac{x}{2}$ （直線）なので

$$V = \pi \int_0^4 \left[x - \frac{x^2}{4} \right] dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} \right]_0^4 = \pi \left(8 - \frac{64}{12} \right) = \pi \left(8 - \frac{16}{3} \right) = \frac{8}{3}\pi$$

$$\text{面積 } S = \frac{4}{3}, \text{ 体積 } V = \frac{8}{3}\pi \quad (\mathcal{A} = 8)$$

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1 この章で学んだ面積・体積・曲線の長さの3つの公式は、見た目こそ違うが、どれも同じ発想にもとづいている。面積の場合を例にとって、その共通の発想を説明せよ。

面積・体積・曲線の長さは、いずれも「積分区間をものすごく細かく分割し、1つ分の断片の量を求めて、それを積分でたし合わせる」という共通の発想でできている。面積を例にとってこの発想をたどってみる。

曲線 $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$) と x 軸の間の面積を求めたいとき、区間 $[a, b]$ を幅 Δx の細い短冊に分割する。1本の短冊は、幅がじゅうぶん小さければほぼ長方形とみなせるので、位置 x における1本の短冊の面積は「高さ×幅」= $f(x) \Delta x$ で近似できる。

この細い長方形の面積を、 a から b まですべてたし合わせると、区間全体の面積のおおよその値になる。分割をどこまでも細かくしていく ($\Delta x \rightarrow 0$ 、本数 $\rightarrow \infty$) と、この和はある一定の値に近づいていく。この極限として面積を定義したものが、まさに定積分 $S = \int_a^b f(x) dx$ にほかならない。

体積であれば断片は円板 ($\pi \{f(x)\}^2 dx$)、曲線の長さであれば断片は微小な線分 ($\sqrt{1 + (y')^2} dx$) になり、たし合わせる対象が変わるだけで、「細かく分けてたし合わせる」という骨組みは面積とまったく同じである。

面積・体積・曲線の長さは、どれも積分区間を細かく分けて1つ分の断片（帯・円板・線分）の量を求め、それを極限として積分でたし合わせるという同じ発想にもとづいている。

記2 不定積分の置換積分と部分積分は、それぞれどのような形の式を見たときに使うべきか、判断の基準を説明せよ。そのうえで、 $\int x\sqrt{2x+1} dx$ を実際に置換積分で求め、答案として仕上げよ。

置換積分は、 $f(g(x))g'(x)$ の形、つまり外側の関数の中に別の関数（かたまり）が入っていて、そのすぐ後ろにちょうど中身の微分がかけてある形を見つけたときに使う。中身を $u = g(x)$ とおくと、式全体が u だけの積分に変わり、計算がラクになる。

一方、部分積分は、種類の異なる2つの関数の積で、そのままでは積分できない形（ x の累乗と $e^x \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \ln x$ の組み合わせなど）に使う。積の微分公式を逆から使う発想であり、微分すると次数が下がる・簡単になる方を $f(x)$ に選ぶのがコツである。

これをふまえて $\int x\sqrt{2x+1} dx$ を求める。根号の中の $2x+1$ をかたまりとみて $u = 2x+1$ とおく。このとき $x = \frac{u-1}{2}$ 、 $dx = \frac{1}{2} du$ なので

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{2x+1} dx &= \int \frac{u-1}{2} \cdot \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{4} \int (u-1)u^{1/2} du = \\ &= \frac{1}{4} \int (u^{3/2} - u^{1/2}) du \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{2}{5} u^{5/2} - \frac{2}{3} u^{3/2} \right) + C = \frac{1}{10} u^{5/2} - \frac{1}{6} u^{3/2} + C\end{aligned}$$

最後に $u = 2x+1$ を戻す。

置換積分は「かたまり+そのすぐ後ろに中身の微分」の形、部分積分は「種類の異なる関数の積」の形に使う。 $\int x\sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{10}(2x+1)^{5/2} - \frac{1}{6}(2x+1)^{3/2} + C$

EXAM

共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 8分／配点 20点

太郎さんは、自転車で走ったときの速さを記録した。出発してから t 秒後の速さが $v(t) = 6 - t$ (m/秒) ($0 \leq t \leq 6$) で表されるとき、出発してから進んだ距離について、花子さんと一緒に考えている。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

花子「速さ $v(t)$ を t で積分すると、出発してから進んだ距離が分かるね。」

太郎「じゃあ、まず不定積分から求めてみよう。」

(1)

出発してから t 秒後までに進んだ距離を $x(t) = \int_0^t v(u) du$ とすると

$$x(t) = \boxed{\text{ア}} t - \frac{t^2}{\boxed{\text{イ}}}$$

となる。ア、イを求めよ。

ア 6 イ 2

$$x(t) = \int_0^t (6 - u) du = \left[6u - \frac{u^2}{2} \right]_0^t = 6t - \frac{t^2}{2}$$

$$x(t) = 6t - \frac{t^2}{2}$$

(2)

花子「速さが0になるのはいつですか。」 $v(t) = 0$ となるのは $t = 6$ のとき（ちょうど記録の終わりの時刻）である。(1)の結果を使うと、出発してから6秒後までに進んだ距離は $x(6) = \boxed{\text{ウエ}}$ mである。ウエを求めよ。

ウエ 18

$$x(6) = 6 \times 6 - \frac{6^2}{2} = 36 - 18 = 18$$

$$x(6) = 18$$

- (3) 太郎「積分で求めた距離は、 vt グラフと t 軸で囲まれた面積とも一致するはずだね。」 $v(t) = 6 - t$ は直線なので、 vt グラフと t 軸・直線 $t = 6$ で囲まれた部分は、底辺オ、高さカの直角三角形になる。この面積はキクであり、(2)の結果と一致することが確認できる。オ、カ、キクを求めよ。

オ 6 カ 6 キク 18

$v(t) = 6 - t$ は $t = 0$ で $v = 6$ 、 $t = 6$ で $v = 0$ となる直線なので、 vt グラフと t 軸・直線 $t = 6$ で囲まれた図形は、底辺6 ($t = 0$ から $t = 6$ まで)、高さ6 ($t = 0$ での速さ)の直角三角形。

$$\text{面積} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$$

これは(2)で積分から求めた距離18mと一致する。定積分 $\int_0^6 v(t) dt$ は、 vt グラフと t 軸で囲まれた面積そのものだからである。

底辺6、高さ6の直角三角形、面積18 ((2)の結果と一致)

大問2 目標時間 8分/配点 20点

花子さんは陶芸教室で湯呑みを作るために、ろくろで回転させる断面の形を考えている。断面の半径は、底からの高さ x cm ($1 \leq x \leq 3$)の位置で $r(x) = x + 1$ (cm)になるように設計した。この形をろくろで回転させてできる立体の体積 V を、先生と一緒に2通りの方法で計算して確かめている。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「体積は $V = \pi \int_1^3 (x + 1)^2 dx$ で求められるね。まずは置換積分で計算してみよう。」

- (1) $u = x + 1$ において置換積分すると、積分区間は $u = \boxed{\text{ア}}$ から $u = \boxed{\text{イ}}$ になる。ア、イを求めよ。

ア 2 イ 4

$$u = x + 1, du = dx. x : 1 \rightarrow 3 \text{ のとき } u : 2 \rightarrow 4.$$

$$u = 2 \text{ から } u = 4$$

- (2) この置換を使って計算すると、体積は $V = \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$ となる。ウエ、オを求めよ。

ウエ 56 オ 3

$$V = \pi \int_2^4 u^2 du = \pi \left[\frac{u^3}{3} \right]_2^4 = \pi \times \frac{64 - 8}{3} = \frac{56}{3} \pi$$

$$V = \frac{56}{3} \pi$$

- (3) 先生「置換を使わずに、直接展開して積分しても確かめられるよ。」 $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ を直接積分すると

$$V = \pi \left[\frac{x^3}{\boxed{\text{力}}} + x^2 + x \right]_1^3$$

となり、(2) と同じ値になることが確認できる。力を求めよ。

力 3

$$\int (x^2 + 2x + 1) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$

$$x = 3 \text{ を代入 : } 9 + 9 + 3 = 21 \quad x = 1 \text{ を代入 : } \frac{1}{3} + 1 + 1 = \frac{7}{3}$$

$$V = \pi \left(21 - \frac{7}{3} \right) = \pi \times \frac{63 - 7}{3} = \frac{56}{3} \pi$$

(2)の結果 $\frac{56}{3}\pi$ と一致し、置換積分の計算が正しいことが確かめられる。

力= 3、 $V = \frac{56}{3}\pi$ ((2)の結果と一致)