

微分の応用（速度・近似・不等式）

問題プリント（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全14問）

基本（1～6）

1 解の個数・範囲の内側

$f(x) = x^3 - 3x^2$ について、方程式 $f(x) = -2$ の異なる実数解の個数を求めよ。

解の個数 個

2 解の個数・範囲の外側

$f(x) = x^3 - 3x^2$ について、方程式 $f(x) = 1$ の異なる実数解の個数を求めよ。

解の個数 個

3 直線上の運動・基本

直線上を運動する点の位置が $x(t) = t^3 - 4t^2 + 3t$ ($t \geq 0$) で表されるとき、 $t = 1$ における速度・加速度を求めよ。

速度 加速度

4 直線上の運動・別の時刻

問題3と同じ $x(t) = t^3 - 4t^2 + 3t$ について、 $t = 3$ における速度・加速度を求めよ。

速度 加速度

5 近似式・ $(1+x)^n$ の基本形

1次近似 $(1+x)^n \approx 1+nx$ を用いて、 $(1.01)^{10}$ の近似値を求めよ。

近似値

6 近似式・負の指数

1次近似 $(1+x)^n \approx 1+nx$ を用いて、 $\frac{1}{1.02}$ の近似値を求めよ。

近似値

標準（7～12）

7 問題1・2と同じ $f(x) = x^3 - 3x^2$ について、方程式 $f(x) = 0$ の異なる実数解の個数を求めよ。

解の個数 個

8 平面上を運動する点Pの座標が $x(t) = 3t^2$, $y(t) = 4t^2$ ($t \geq 0$) で表されるとき、 $t = 1$ における速度ベクトルの成分と速さを求めよ。

$v_x =$ $v_y =$ 速さ

9 問題8と同じ $x(t) = 3t^2$, $y(t) = 4t^2$ について、 $t = 2$ における速度ベクトルの成分と速さを求めよ。

$v_x =$ $v_y =$ 速さ

10 1次近似を用いて、 $\sqrt{99}$ の近似値を求めよ。

近似値

11 1次近似を用いて、 $\sqrt[3]{1003}$ の近似値を求めよ。

近似値

12 図形の最大最小・厚紙の箱の容積

一辺が 12 cm の正方形の厚紙がある。この厚紙の四隅から一辺 x cm の正方形を切り取り、点線に沿って折り曲げてふたのない直方体の容器を作る ($0 < x < 6$)。容器の容積を V とするとき、 V を最大にする x の値と、そのときの V の値を求めよ。

$x =$ のとき、 V は最大値

cm^3 をとる。

挑戦 (13~15)

13 解の個数から逆に a の範囲を求める

$g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ について、方程式 $g(x) = a$ が異なる3つの実数解をもつような a の範囲を求めよ。(下限より大きく上限より小さい、と入力)

$< a <$

14 加速度が0になる時刻

直線上を運動する点の位置が $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ ($t \geq 0$) で表されるとき、加速度が0になる時刻 t と、そのときの速度を求めよ。

$t =$ そのときの速度

15 一般の1次近似 ($(1+x)^n$ の形でない場合)

$f(x) = x^3$ とする。1次近似 $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$ を $a = 2$ として用い、 $(2.01)^3$ の近似値を求めよ。

近似値

DRILL

応用問題 (プリント限定)

ここから先はPDF限定の腕試し。平均値の定理の入り口と、不等式証明の応用に挑戦しよう。

応1 平均値の定理・入り口

関数 $f(x) = x^2$ について、区間 $[1, 3]$ で平均値の定理を用いると、 $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = f'(c)$ を満たす c ($1 < c < 3$) がただ1つ存在する。この c の値を求めよ。

$c =$

応2 平均値の定理・ c が根号を含む

関数 $f(x) = x^3$ について、区間 $[0, 2]$ で平均値の定理を用いると $\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(c)$ を満たす c ($0 < c < 2$) が存在する。この c の値を求めよ。

$c =$

応3 不等式証明の応用 (三角関数)

$x > 0$ のとき $\sin x < x$ が成り立つことを証明せよ。

応4 不等式証明の応用 (STEP2の結果を利用)

$x \geq 0$ のとき $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ が成り立つことを証明せよ。(STEP2で示した $e^x \geq 1 + x$ を利用してよい)

応5

不等式証明の応用（対数）

$x > 0$ のとき $\ln(1+x) < x$ が成り立つことを証明せよ。

応6

接線と座標軸が作る三角形の面積の最小値

曲線 $y = 3 - x^2$ 上の点 $(t, 3 - t^2)$ ($t > 0$) における接線を引く。この接線と x 軸・ y 軸で囲まれる三角形の面積を $S(t)$ とするとき、 $S(t)$ を最小にする t の値と、そのときの面積の最小値を求めよ。

$t =$ 面積の最小値

DRILL 記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1

$A > B$ の形の不等式を証明するとき、なぜ $g(x) = A - B$ とおいて $g(x)$ の最小値を調べるという方針をとるのか。また、増減表を作っただけで終わらず、最小値の値まで確認する必要があるのはなぜか。あわせて説明せよ。

記2

$f(x) = x^3 - 3x^2$ について、方程式 $f(x) = k$ の異なる実数解の個数を、 k の値の範囲によって分類せよ。増減表を書いて示すこと。
