

微分の応用（速度・近似・不等式）

解答（全19問）

氏名 _____

得点 _____ / 19点

DRILL

練習問題（全14問）

基本（1～6）

1

解の個数・範囲の内側

$f(x) = x^3 - 3x^2$ について、方程式 $f(x) = -2$ の異なる実数解の個数を求めよ。

解の個数 3 個

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) \quad f'(x) = 0 \text{ より } x = 0, 2.$$

増減表より $x < 0$ で増加、 $0 < x < 2$ で減少、 $x > 2$ で増加。

$$f(0) = 0 \text{ (極大値)}, f(2) = 8 - 12 = -4 \text{ (極小値)}.$$

$k = -2$ は極小値 -4 と極大値 0 の間 ($-4 < -2 < 0$) にあるので、横線 $y = -2$ は山→谷→また上昇の3か所で交わる。

異なる実数解は3個

2

解の個数・範囲の外側

$f(x) = x^3 - 3x^2$ について、方程式 $f(x) = 1$ の異なる実数解の個数を求めよ。

解の個数 1 個

問題1と同じ関数（極大値0・極小値-4）を使う。

$k = 1$ は極大値0より大きい（ $k > 0$ ）ので、横線 $y = 1$ は山の右側で1回しか交わらない（山と谷の高さの間には届かない位置）。

異なる実数解は1個

3

直線上の運動・基本

直線上を運動する点の位置が $x(t) = t^3 - 4t^2 + 3t$ ($t \geq 0$) で表されるとき、 $t = 1$ における速度・加速度を求めよ。

速度 -2 加速度 -2

$$v(t) = x'(t) = 3t^2 - 8t + 3, \quad a(t) = v'(t) = 6t - 8$$

$t = 1$ を代入すると $v(1) = 3 - 8 + 3 = -2$ 、 $a(1) = 6 - 8 = -2$ 。

速度 -2、加速度 -2

4

直線上の運動・別の時刻

問題3と同じ $x(t) = t^3 - 4t^2 + 3t$ について、 $t = 3$ における速度・加速度を求めよ。

速度 6 加速度 10

$v(t) = 3t^2 - 8t + 3$ 、 $a(t) = 6t - 8$ に $t = 3$ を代入する。

$$v(3) = 27 - 24 + 3 = 6, \quad a(3) = 18 - 8 = 10$$

速度 6、加速度 10

5

近似式・ $(1+x)^n$ の基本形

1次近似 $(1+x)^n \doteq 1 + nx$ を用いて、 $(1.01)^{10}$ の近似値を求めよ。

近似値 1.1

$n = 10$, $x = 0.01$ を代入する。

$$(1.01)^{10} \doteq 1 + 10 \times 0.01 = 1 + 0.1$$

$$(1.01)^{10} \doteq 1.1$$

1次近似 $(1+x)^n \doteq 1+nx$ を用いて、 $\frac{1}{1.02}$ の近似値を求めよ。

近似値 0.98

$\frac{1}{1.02} = (1+0.02)^{-1}$ とみて、 $n = -1$, $x = 0.02$ を代入する。

$$(1+0.02)^{-1} \doteq 1 + (-1) \times 0.02 = 1 - 0.02$$

$$\frac{1}{1.02} \doteq 0.98$$

標準 (7~11) ※どの考え方を使うかは自分で判定

7 問題1・2と同じ $f(x) = x^3 - 3x^2$ について、方程式 $f(x) = 0$ の異なる実数解の個数を求めよ。

解の個数 2 個

$k = 0$ はちょうど極大値と一致する境界の値。

実際に解くと $x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-3) = 0$ より $x = 0$ (重解) または $x = 3$ 。

異なる x の値としては $x = 0$ と $x = 3$ の2個 ($x = 0$ は極大点で山の頂上に横線が接するように交わるため、重なって1個分にしか数えない)。

異なる実数解は2個

- 8 平面上を運動する点Pの座標が $x(t) = 3t^2$, $y(t) = 4t^2$ ($t \geq 0$) で表されるとき、 $t = 1$ における速度ベクトルの成分と速さを求めよ。

$$v_x = \underline{6} \quad v_y = \underline{8} \quad \text{速さ} \underline{10}$$

$$\frac{dx}{dt} = 6t, \quad \frac{dy}{dt} = 8t$$

$t = 1$ を代入すると $v_x = 6$, $v_y = 8$ 。
速さは $\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100}$ 。

$$v_x = 6, v_y = 8, \text{速さ } 10$$

- 9 問題8と同じ $x(t) = 3t^2$, $y(t) = 4t^2$ について、 $t = 2$ における速度ベクトルの成分と速さを求めよ。

$$v_x = \underline{12} \quad v_y = \underline{16} \quad \text{速さ} \underline{20}$$

$\frac{dx}{dt} = 6t$, $\frac{dy}{dt} = 8t$ に $t = 2$ を代入する。

$$v_x = 12, \quad v_y = 16$$

速さは $\sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400}$ 。

$$v_x = 12, v_y = 16, \text{速さ } 20$$

10 1次近似を用いて、 $\sqrt{99}$ の近似値を求めよ。

近似値 9.95

$99 = 100(1 - 0.01)$ と変形する。

$$\sqrt{99} = 10\sqrt{1 - 0.01} = 10(1 - 0.01)^{\frac{1}{2}}$$

$n = \frac{1}{2}$, $x = -0.01$ を代入すると

$$(1 - 0.01)^{\frac{1}{2}} \doteq 1 + \frac{1}{2} \times (-0.01) = 1 - 0.005 = 0.995$$

$$\sqrt{99} \doteq 10 \times 0.995 = 9.95$$

11 1次近似を用いて、 $\sqrt[3]{1003}$ の近似値を求めよ。

近似値 10.01

$1003 = 1000(1 + 0.003)$ と変形する。

$$\sqrt[3]{1003} = 10\sqrt[3]{1 + 0.003} = 10(1 + 0.003)^{\frac{1}{3}}$$

$n = \frac{1}{3}$, $x = 0.003$ を代入すると

$$(1 + 0.003)^{\frac{1}{3}} \doteq 1 + \frac{1}{3} \times 0.003 = 1 + 0.001 = 1.001$$

$$\sqrt[3]{1003} \doteq 10 \times 1.001 = 10.01$$

挑戦 (12~14)

12

解の個数から逆にaの範囲を求める

$g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ について、方程式 $g(x) = a$ が異なる3つの実数解をもつような a の範囲を求めよ。(下限より大きく上限より小さい、と入力)

$$\underline{0} < a < \underline{4}$$

$$g'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3) \quad g'(x) = 0 \text{ より } x = 1, 3。$$

増減表より $x < 1$ で増加、 $1 < x < 3$ で減少、 $x > 3$ で増加。

$$g(1) = 1 - 6 + 9 = 4 \text{ (極大値)}、g(3) = 27 - 54 + 27 = 0 \text{ (極小値)}。$$

異なる3つの実数解をもつのは、横線 $y = a$ が極大値と極小値の間を通るとき (境界の等号を含むと接して2個になるため含まない)。

$$0 < a < 4$$

13

加速度が0になる時刻

直線上を運動する点の位置が $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ ($t \geq 0$) で表されるとき、加速度が0になる時刻 t と、そのときの速度を求めよ。

$$t = \underline{2} \quad \text{そのときの速度} \quad \underline{-3}$$

$$v(t) = x'(t) = 3t^2 - 12t + 9, \quad a(t) = v'(t) = 6t - 12$$

$$a(t) = 0 \text{ を解くと } 6t - 12 = 0 \text{ より } t = 2。$$

$$t = 2 \text{ のときの速度は } v(2) = 3 \times 4 - 24 + 9 = 12 - 24 + 9。$$

$$t = 2 \text{ で加速度} 0、\text{そのときの速度は } -3$$

$f(x) = x^3$ とする。1次近似 $f(x) \doteq f(a) + f'(a)(x - a)$ を $a = 2$ として用い、 $(2.01)^3$ の近似値を求めよ。

近似値 8.12

$f(x) = x^3$ 、 $f'(x) = 3x^2$ 。 $a = 2$ とすると $f(2) = 8$ 、 $f'(2) = 3 \times 4 = 12$ 。
 $x = 2.01$ は $a = 2$ に近いので、一般の1次近似公式を使う。

$$f(2.01) \doteq f(2) + f'(2)(2.01 - 2) = 8 + 12 \times 0.01$$

$$(2.01)^3 \doteq 8 + 0.12 = 8.12$$

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。平均値の定理の入り口と、不等式証明の応用に挑戦しよう。

応1

平均値の定理・入り口

関数 $f(x) = x^2$ について、区間 $[1, 3]$ で平均値の定理を用いると、
 $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = f'(c)$ を満たす c ($1 < c < 3$) がただ1つ存在する。この c の
値を求めよ。

$$c = \underline{2}$$

平均値の定理は「 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続・微分可能なら、 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ ($a < c < b$) を満たす c が少なくとも1つ存在する」という定理。
まず左辺（平均変化率）を計算する。

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = 4$$

次に $f'(x) = 2x$ なので、 $f'(c) = 4$ を解く。

$$2c = 4$$

$c = 2$ は区間 $1 < c < 3$ の中にあるので条件を満たす。

$$c = 2$$

関数 $f(x) = x^3$ について、区間 $[0, 2]$ で平均値の定理を用いると

$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(c)$ を満たす c ($0 < c < 2$) が存在する。この c の値を求めよ。

$$c = \underline{2\sqrt{3}/3}$$

平均変化率を計算する。

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{8 - 0}{2} = 4$$

$f'(x) = 3x^2$ なので、 $f'(c) = 4$ を解く。

$$3c^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad c^2 = \frac{4}{3}$$

$0 < c < 2$ より $c > 0$ なので正の解を選ぶ。

$$c = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$\frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1.15$ は区間 $0 < c < 2$ の中にある。

$$c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$x > 0$ のとき $\sin x < x$ が成り立つことを証明せよ。

$g(x) = x - \sin x$ とおく。 $g(x) > 0$ ($x > 0$) を示せばよい。

$$g'(x) = 1 - \cos x$$

$\cos x \leq 1$ は常に成り立つので、 $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ がすべての実数 x で成り立つ。

等号が成り立つのは $\cos x = 1$ 、つまり $x = 2n\pi$ (n は整数) のときだけで、それ以外では $g'(x) > 0$ 。

等号が成り立つ点が孤立している（連続した区間ではない）ので、 $g(x)$ は実数全体で単調に増加する。

$g(0) = 0 - \sin 0 = 0$ なので、 $x > 0$ のとき $g(x) > g(0) = 0$ 。

$x > 0$ のとき $\sin x < x$ （証明終わり）

$x \geq 0$ のとき $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ が成り立つことを証明せよ。(STEP2で示した $e^x \geq 1 + x$ を利用してよい)

$h(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ ($x \geq 0$) とおく。 $h(x) \geq 0$ を示せばよい。

$$h'(x) = e^x - 1 - x$$

STEP2の例題3で示したとおり、すべての実数 x について $e^x \geq 1 + x$ 、すなわち $e^x - 1 - x \geq 0$ が成り立つ (等号は $x = 0$ のときのみ)。

つまり $h'(x) = e^x - 1 - x \geq 0$ が $x \geq 0$ で成り立ち、等号は $x = 0$ のときだけ。

したがって $h(x)$ は $x \geq 0$ で単調に増加 ($x = 0$ 以外は狭義増加) する。

$$h(0) = e^0 - 1 - 0 - 0 = 0$$

ゆえに $x \geq 0$ のとき $h(x) \geq h(0) = 0$ 、すなわち

$x \geq 0$ のとき $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ (等号は $x = 0$ のときのみ成立、証明終わり)

$x > 0$ のとき $\ln(1+x) < x$ が成り立つことを証明せよ。

$g(x) = x - \ln(1+x)$ ($x > -1$ で定義) とおく。 $x > 0$ で $g(x) > 0$ を示せばよい。

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{(1+x) - 1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

$x > 0$ のとき、分子 $x > 0$ 、分母 $1+x > 0$ なので $g'(x) > 0$ 。
よって $g(x)$ は $x > 0$ の範囲で単調に増加する。

$$g(0) = 0 - \ln 1 = 0 - 0 = 0$$

$g(x)$ は $x = 0$ から単調に増加するので、 $x > 0$ のとき $g(x) > g(0) = 0$ 。

$x > 0$ のとき $\ln(1+x) < x$ (証明終わり)