

接線・増減・グラフ

解答（全21問）

氏名 _____

得点 _____ / 21点

DRILL

練習問題（全16問）

基本（1～6）

1

接線・べき関数

曲線 $y = x^3$ 上の点 $(1, 1)$ における接線の傾きと y 切片を求めよ。

傾き 3 y 切片 -2

$f'(x) = 3x^2$ より $f'(1) = 3$ 。接線は $y = 3(x - 1) + 1 = 3x - 2$ 。

傾き 3、 y 切片 -2

2

接線・指数関数

曲線 $y = e^x$ 上の点 $(0, 1)$ における接線の傾きと y 切片を求めよ。

傾き 1 y 切片 1

$f'(x) = e^x$ より $f'(0) = 1$ 。接線は $y = 1(x - 0) + 1 = x + 1$ 。

傾き 1、 y 切片 1

3

接線・対数関数

曲線 $y = \ln x$ 上の点 $(1, 0)$ における接線の傾きと y 切片を求めよ。

傾き 1 y 切片 -1

$f'(x) = \frac{1}{x}$ より $f'(1) = 1$ 。接線は $y = 1(x - 1) + 0 = x - 1$ 。

傾き 1、 y 切片 -1

4

極値・基本の3次関数

$y = x^3 - 3x$ の極値を求めよ。

極大値 2 ($x = \underline{-1}$) 極小値 -2 ($x = \underline{1}$)

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$ 。 $x < -1$ で増加、 $-1 < x < 1$ で減少、 $x > 1$ で増加。

$f(-1) = -1 + 3 = 2$ 、 $f(1) = 1 - 3 = -2$ 。

$x = -1$ で極大値 2、 $x = 1$ で極小値 -2

5

極値・3次関数（別パターン）

$y = x^3 - 12x$ の極値を求めよ。

極大値 16 ($x = \underline{-2}$) 極小値 -16 ($x = \underline{2}$)

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$ 。 $x < -2$ で増加、 $-2 < x < 2$ で減少、 $x > 2$ で増加。

$f(-2) = -8 + 24 = 16$ 、 $f(2) = 8 - 24 = -16$ 。

$x = -2$ で極大値 16、 $x = 2$ で極小値 -16

$y = x^3 - 3x^2 + 2$ の変曲点の座標を求めよ。

変曲点 (1 , 0)

$f'(x) = 3x^2 - 6x$ 、 $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$ 。 $f''(x) = 0$ より $x = 1$ 。
 $x < 1$ で下に凸、 $x > 1$ で上に凸なので符号が変わり、確かに変曲点。
 $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$ 。

変曲点 (1, 0)

標準 (7~12) ※公式は自分で判定

7 曲線 $y = xe^x$ 上の点 $(0, 0)$ における接線の傾きと y 切片を求めよ。

傾き 1 y 切片 0

積の微分より $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$ 。 $f'(0) = 1 \cdot 1 = 1$ 。接線は $y = 1(x - 0) + 0 = x$ 。

傾き 1、 y 切片 0

8 曲線 $y = \frac{\ln x}{x}$ 上の点 $(e, \frac{1}{e})$ における接線の傾きと y 切片を求めよ。

傾き 0 y 切片 $1/e$

商の微分より

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$f'(e) = \frac{1 - \ln e}{e^2} = \frac{1 - 1}{e^2} = 0$ 。傾きが0なので接線は水平な直線 $y = \frac{1}{e}$ 。

傾き 0、 y 切片 $\frac{1}{e}$

9 $y = (x - 1)e^x$ の極値を求めよ。

極小値 -1 ($x =$ 0)

積の微分より $f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = e^x \cdot x$ 。 $e^x > 0$ なので符号は x だけで決まる。

$x < 0$ で減少、 $x > 0$ で増加（極大値は存在しない）。

$$f(0) = (0 - 1) \cdot 1 = -1。$$

$x = 0$ で極小値 -1 （極大値なし）

10 $y = x - \ln x$ ($x > 0$) の極値を求めよ。

極小値 1 ($x =$ 1)

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x - 1}{x} \quad (x > 0 \text{ なので分母は常に正})。$$

$0 < x < 1$ で減少、 $x > 1$ で増加。

$$f(1) = 1 - \ln 1 = 1 - 0 = 1。$$

$x = 1$ で極小値 1

11 $y = (x - 2)e^x$ の変曲点の座標を求めよ。

変曲点 (0 , -2)

$$f'(x) = e^x + (x - 2)e^x = e^x(x - 1)。$$
 もう一度微分すると

$$f''(x) = e^x(x - 1) + e^x \cdot 1 = e^x \cdot x$$

$f''(x) = 0$ より $x = 0$ ($e^x > 0$ なので符号は x だけで決まり、確かに符号が変わる)。

$$f(0) = (0 - 2) \cdot 1 = -2。$$

変曲点 $(0, -2)$

12 $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ の変曲点の座標を求めよ。

変曲点 (2 , 2)

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ 、 $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$ 。 $f''(x) = 0$ より $x = 2$ 。

$x < 2$ で上に凸、 $x > 2$ で下に凸なので符号が変わり、確かに変曲点。

$f(2) = 8 - 24 + 18 = 2$ 。

変曲点 (2, 2)

挑戦 (13~16)

13

極値・積の微分+ e^x

$y = x^2 e^{-x}$ の極値を求めよ。極大値は $\frac{k}{e^2}$ の形で表せるとして、 k の値とそのときの x 、また極小値とそのときの x を求めよ。

極大値の $k = \underline{4}$ ($x = \underline{2}$) 極小値 0 ($x = \underline{0}$)

積の微分より

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2) = e^{-x}x(2 - x)$$

$e^{-x} > 0$ なので符号は $x(2 - x)$ (上に凸な放物線型、0と2の間だけ正) で決まる。

$x < 0$ で減少、 $0 < x < 2$ で増加、 $x > 2$ で減少。

$f(0) = 0$ (極小)、 $f(2) = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2}$ (極大)。

極大値 $\frac{4}{e^2}$ ($x = 2$ 、つまり $k = 4$)、極小値 0 ($x = 0$)

$y = x^2 e^{-x}$ の変曲点の x 座標をすべて求めよ (2つある)。

$$x = \underline{2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}}$$

問題13より $f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$ 。もう一度微分する。

$$f''(x) = -e^{-x}(2x - x^2) + e^{-x}(2 - 2x) = e^{-x}\{-(2x - x^2) + (2 - 2x)\} = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$$

$e^{-x} > 0$ なので $x^2 - 4x + 2 = 0$ を解けばよい。解の公式より

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

この2次式は上に凸ではなく下に凸な放物線 (x^2 の係数が正) なので、2つの解のそれぞれで符号がちゃんと変わり、両方とも変曲点になる。

$$x = 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}$$

$y = x^3 - 3x^2 + 4$ の変曲点における接線の方程式を求めよ。変曲点の x 座標、接線の傾き、 y 切片を答えよ。

$$\text{変曲点 } x = \underline{1} \quad \text{傾き } \underline{-3} \quad y \text{ 切片 } \underline{5}$$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$ 、 $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$ 。 $f''(x) = 0$ より $x = 1$ 、符号も変わるので変曲点。

$f(1) = 1 - 3 + 4 = 2$ 。変曲点における接線の傾きは $f'(1) = 3 - 6 = -3$ 。

接線の方程式は $y = -3(x - 1) + 2 = -3x + 3 + 2 = -3x + 5$ 。

変曲点 $x = 1$ 、接線の傾き -3 、 y 切片 5

STEP4で調べた $y = xe^{-x}$ について、極値をとる x の値、変曲点の x 座標、そして変曲点における接線の傾きを求めよ。

極値の $x = \underline{1}$ 変曲点の $x = \underline{2}$ 接線の傾き $\underline{-1/e^2}$

STEP4例題9より $f'(x) = e^{-x}(1-x)$ 、 $f''(x) = e^{-x}(x-2)$ 。

極値は $f'(x) = 0$ より $x = 1$ （極大）。変曲点は $f''(x) = 0$ より $x = 2$ 。

変曲点における接線の傾きは $f'(2) = e^{-2}(1-2) = -e^{-2} = -\frac{1}{e^2}$ 。

極値の $x = 1$ 、変曲点の $x = 2$ 、変曲点での接線の傾き $-\frac{1}{e^2}$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。パラメータ条件・漸近線・区間内の最大最小の融合問題に挑戦しよう。

応1

極値をもつ条件（判別式）

$f(x) = x^3 + ax + 1$ が極大値・極小値をとともにもつような a の値の範囲を求めよ。範囲は $a < K$ の形で表せるとして、 K の値を求めよ。

$K =$ 0

$f'(x) = 3x^2 + a$ 。極大値・極小値をとともにもつのは、 $f'(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもち、かつそこで符号が変わるとき。

$f'(x) = 3x^2 + 0 \cdot x + a$ を x の2次方程式とみて、判別式 D を考える。

$$D = 0^2 - 4 \cdot 3 \cdot a = -12a$$

異なる2つの実数解をもつ条件は $D > 0$ 。

$$-12a > 0 \Leftrightarrow a < 0$$

($a \geq 0$ のときは $f'(x) = 3x^2 + a \geq 0$ が常に成り立ち、 $f(x)$ は単調増加で極値をもたない。)

$a < 0$ ($K = 0$)

$y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ の漸近線をすべて求めよ。斜めの漸近線は $y = mx + n$ の形、縦の漸近線は $x = p$ の形で答えよ。

斜め: $m = \underline{1}$ $n = \underline{0}$ 縦: $p = \underline{1}$

分子を分母で割り算する。 $x^2 - x + 1$ を $x - 1$ で割ると、商 x 、余り 1 ($(x - 1) \cdot x = x^2 - x$ 、余り $(x^2 - x + 1) - (x^2 - x) = 1$)。

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x + \frac{1}{x - 1}$$

$x \rightarrow \pm\infty$ のとき $\frac{1}{x - 1} \rightarrow 0$ なので y は直線 $y = x$ に近づく (斜めの漸近線 $m = 1, n = 0$)。

$x \rightarrow 1$ のとき分母が 0 に近づき (分子は $x = 1$ で $1 \neq 0$ なので約分されない)、縦の漸近線 $x = 1$ をもつ。

斜めの漸近線 $y = x$ 、縦の漸近線 $x = 1$

$f(x) = x^3 - 3x$ ($-2 \leq x \leq 3$) の最大値・最小値を求めよ。最小値をとる x が 2 つある場合はコンマ区切りで入力せよ。

最大値 18 ($x =$ 3 $)$ 最小値 -2 ($x =$ -2,1 $)$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ 。区間内の候補点は $x = -1, 1$ 。極値の候補と区間の両端をすべて比較する。

$$f(-2) = -8 + 6 = -2, \quad f(-1) = -1 + 3 = 2, \quad f(1) = 1 - 3 = -2, \quad f(3) = 27 - 9 = 18$$

4つの値 $-2, 2, -2, 18$ を比べると、最大は 18 ($x = 3$ 、区間の右端)。

最小は -2 だが、これは $x = -2$ (区間の左端) と $x = 1$ (極小点) の両方で同じ値になっている (見落としやすい落とし穴)。

$x = 3$ で最大値 18 、 $x = -2, 1$ で最小値 -2

応4

極値をもつ条件（判別式・係数が複雑）

$f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + 1$ が極大値・極小値をともにもつような a の値の範囲を求めよ。範囲は $a < K$ の形で表せるとして、 K の値を求めよ。

$K = \underline{3}$

$f'(x) = 3x^2 + 6x + a$ 。極大値・極小値をともにもつのは、 $f'(x) = 0$ (x の2次方程式) が異なる2つの実数解をもつとき。

判別式は

$$D = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot a = 36 - 12a$$

$D > 0$ を解く。

$$36 - 12a > 0 \Leftrightarrow 36 > 12a \Leftrightarrow a < 3$$

$a < 3$ ($K = 3$)

応5

最大最小の融合（STEP4の関数の区間内最大最小）

$f(x) = xe^{-x}$ ($0 \leq x \leq 3$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 $\underline{1/e}$ ($x = \underline{1}$) 最小値 $\underline{0}$ ($x = \underline{0}$)

STEP4例題9より $f'(x) = e^{-x}(1 - x)$ 。区間内の候補点は $x = 1$ (極大)。区間の両端も含めて比較する。

$$f(0) = 0, \quad f(1) = \frac{1}{e} \approx 0.368, \quad f(3) = 3e^{-3} = \frac{3}{e^3} \approx 0.149$$

3つの値を比べると、最大は $x = 1$ の $\frac{1}{e}$ (極大値がそのまま区間内の最大値になる)。

最小は $x = 0$ の 0 (区間の左端。右端 $x = 3$ の値 $\frac{3}{e^3}$ より小さい)。

$x = 1$ で最大値 $\frac{1}{e}$ 、 $x = 0$ で最小値 0

