

いろいろな関数の導関数

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～8）

1

$\sin x$ の微分係数

$y = \sin x$ の $x = \frac{\pi}{3}$ における微分係数を求めよ。

$$y' \left(\frac{\pi}{3} \right) = \underline{1/2}$$

$$y' = \cos x \text{ なので } y' \left(\frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3}。$$

$$y' \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$$

2

cosxの微分係数

$y = \cos x$ の $x = \frac{\pi}{6}$ における微分係数を求めよ。

$$y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \underline{-1/2}$$

$$y' = -\sin x \text{ なので } y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6}。$$

$$y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2}$$

3

tanxの微分係数

$y = \tan x$ の $x = \frac{\pi}{4}$ における微分係数を求めよ。

$$y' \left(\frac{\pi}{4} \right) = \underline{2}$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}。 \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ より } \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}。$$

$$y' \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{1/2}$$

$$y' \left(\frac{\pi}{4} \right) = 2$$

4

lnxの微分係数

$y = \ln x$ の $x = 4$ における微分係数を求めよ。

$$y'(4) = \underline{1/4}$$

$$y' = \frac{1}{x} \text{ なので } x = 4 \text{ を代入する。}$$

$$y'(4) = \frac{1}{4}$$

5

 e^x の微分係数

$y = e^x$ の $x = 2$ における微分係数を求めよ。

$$y'(2) = \underline{e^2}$$

$y' = e^x$ (微分しても形が変わらない) なので、そのまま $x = 2$ を代入する。

$$y'(2) = e^2$$

6

 $\ln(kx)$ の微分・チェーンルール

$y = \ln(3x)$ の $x = 5$ における微分係数を求めよ。

$$y'(5) = \underline{1/5}$$

$u = 3x$ とおくと $y = \ln u$ 。チェーンルールより

$$y' = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x}$$

(係数の3が約分で消える点に注意) $x = 5$ を代入する。

$$y'(5) = \frac{1}{5}$$

7

sin(kx)の微分・チェーンルール

$y = \sin(3x)$ の $x = 0$ における微分係数を求めよ。

$$y'(0) = \underline{3}$$

$u = 3x$ とおくと $y = \sin u$ 。

$$y' = \cos u \cdot \frac{du}{dx} = 3 \cos(3x)$$

$x = 0$ を代入すると $\cos 0 = 1$ 。

$$y'(0) = 3$$

8

 $e^{(kx)}$ の微分・チェーンルール

$y = e^{-2x}$ の $x = 0$ における微分係数を求めよ。

$$y'(0) = \underline{-2}$$

$u = -2x$ とおくと $y = e^u$ 。

$$y' = e^u \cdot \frac{du}{dx} = -2e^{-2x}$$

$x = 0$ を代入すると $e^0 = 1$ 。

$$y'(0) = -2$$

- 9 $y = x \sin x$ の $x = \frac{\pi}{2}$ における微分係数を求めよ。

$$y' \left(\frac{\pi}{2} \right) = \underline{1}$$

積の微分公式より

$$y' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cos x$$

$x = \frac{\pi}{2}$ を代入すると $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ なので $y' = 1 + \frac{\pi}{2} \cdot 0$ 。

$$y' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1$$

- 10 $y = e^{2x} \cos x$ の $x = 0$ における微分係数を求めよ。

$$y'(0) = \underline{2}$$

積の微分公式 (e^{2x} の微分はチェーンルールで $2e^{2x}$) より

$$y' = 2e^{2x} \cos x + e^{2x}(-\sin x) = e^{2x}(2 \cos x - \sin x)$$

$x = 0$ を代入すると $e^0 = 1$, $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$ なので $y' = 1 \cdot (2 - 0)$ 。

$$y'(0) = 2$$

- 11 $y = \frac{\ln x}{x}$ の $x = e$ における微分係数を求めよ。

$$y'(e) = \underline{0}$$

商の微分公式より

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$x = e$ を代入すると $\ln e = 1$ なので分子は $1 - 1 = 0$ 。

$$y'(e) = 0$$

- 12 $y = x \ln x$ の $x = e$ における微分係数を求めよ。

$$y'(e) = \underline{2}$$

積の微分公式より

$$y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$x = e$ を代入すると $\ln e = 1$ なので $y' = 1 + 1$ 。

$$y'(e) = 2$$

- 13 $y = \cos(2x)$ の $x = \frac{\pi}{4}$ における微分係数を求めよ。

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \underline{-2}$$

チェインルールより $y' = -2 \sin(2x)$ 。

$x = \frac{\pi}{4}$ を代入すると $2x = \frac{\pi}{2}$ 、 $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ なので $y' = -2 \cdot 1$ 。

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$$

14 $y = \ln(x^2 + 1)$ の $x = 3$ における微分係数を求めよ。

$$y'(3) = \underline{3/5}$$

$u = x^2 + 1$ とおくと $y = \ln u$ 。チェーンルールより

$$y' = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$x = 3$ を代入すると $x^2 + 1 = 10$, $2x = 6$ なので $y' = \frac{6}{10}$ 。

$$y'(3) = \frac{3}{5}$$

挑戦 (15~18)

15

高次導関数

$y = \sin x$ の第2次導関数 y'' を求め、 $y''(\pi)$ の値を求めよ。

$$y''(\pi) = \underline{0}$$

$y' = \cos x$ をもう一度微分すると $y'' = -\sin x$ 。

$x = \pi$ を代入すると $\sin \pi = 0$ なので $y'' = -0$ 。

$$y''(\pi) = 0$$

16

高次導関数

$y = e^{2x}$ の第3次導関数 y''' を求め、 $y'''(0)$ の値を求めよ。

$$y'''(0) = \underline{8}$$

1回微分するたびに係数2がかかっていく。

$$y' = 2e^{2x}, \quad y'' = 4e^{2x}, \quad y''' = 8e^{2x}$$

$x = 0$ を代入すると $e^0 = 1$ なので $y''' = 8 \cdot 1$ 。

$$y'''(0) = 8$$

17

陰関数の微分

$x^2 + y^2 = 25$ について、点 $(3, 4)$ における $\frac{dy}{dx}$ の値を求めよ。

$$y' = \underline{-3/4}$$

両辺を x で微分すると (y^2 の微分はチェーンルールで $2y \cdot y'$)

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}$$

$(3, 4)$ を代入する。

$$y' = -\frac{3}{4}$$

$x = t^2$, $y = t^3$ について、 $t = 2$ における $\frac{dy}{dx}$ の値を求めよ。

$$\frac{dy}{dx} = \underline{3}$$

それぞれ t で微分すると $\frac{dx}{dt} = 2t$, $\frac{dy}{dt} = 3t^2$ 。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3t}{2} \quad (t \neq 0)$$

$t = 2$ を代入すると $\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cdot 2}{2}$ 。

$$\frac{dy}{dx} = 3$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。対数微分法の本格的な使い方や、媒介変数・陰関数の応用に挑戦しよう。

$y = \frac{(x+1)^2(x-2)}{\sqrt{x+3}}$ を対数微分法で微分し、 $y'(1)$ の値を求めよ。

$$y'(1) = \underline{\underline{1/4}}$$

$x = 1$ では $x - 2 = -1 < 0$ となり y 自体が負の値をとりうるので、両辺の絶対値の対数をとる ($(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$ は u の符号によらず成り立つので、この後の計算は $\ln y$ のときと同じ形で進めてよい)。

$$\ln |y| = 2 \ln |x+1| + \ln |x-2| - \frac{1}{2} \ln |x+3|$$

両辺を x で微分する。

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{2(x+3)}$$

まず $x = 1$ での y の値を求める。

$$y(1) = \frac{(1+1)^2(1-2)}{\sqrt{1+3}} = \frac{4 \cdot (-1)}{2} = -2$$

次に $x = 1$ での $\frac{y'}{y}$ の値を求める。

$$\left. \frac{y'}{y} \right|_{x=1} = \frac{2}{2} + \frac{1}{-1} - \frac{1}{2 \cdot 4} = 1 - 1 - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$$

$y' = y \times \frac{y'}{y}$ より

$$y'(1) = (-2) \times \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4}$$

$$y'(1) = \frac{1}{4}$$

$y = x^x$ ($x > 0$) を微分し、 $y'(1)$ の値を求めよ。

$$y'(1) = \underline{1}$$

x が指数の位置にもあるので、指数関数の微分公式がそのままは使えない。両辺の自然対数をとる。

$$\ln y = \ln(x^x) = x \ln x$$

両辺を x で微分する（右辺は積の微分公式）。

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

y' について解いて $y = x^x$ をもとにもどす。

$$y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

$x = 1$ を代入すると $1^1 = 1$, $\ln 1 = 0$ なので $y'(1) = 1 \times (0 + 1)$ 。

$$y' = x^x(\ln x + 1), y'(1) = 1$$

$x = 2 \cos t$, $y = 3 \sin t$ について、 $t = \frac{\pi}{6}$ における $\frac{dy}{dx}$ の値を求めよ。

$$\frac{dy}{dx} = \underline{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

それぞれ t で微分すると $\frac{dx}{dt} = -2 \sin t$, $\frac{dy}{dt} = 3 \cos t$ 。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cos t}{-2 \sin t} = -\frac{3 \cos t}{2 \sin t}$$

$t = \frac{\pi}{6}$ を代入する。 $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ より

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$xy = e^{x-y}$ について、点 $(1, 1)$ における $\frac{dy}{dx}$ の値を求めよ。

$$y' = \underline{0}$$

点 $(1, 1)$ が曲線上にあることをまず確認する。左辺 $xy = 1 \cdot 1 = 1$ 、右辺 $e^{x-y} = e^0 = 1$ で一致する。

両辺を x で微分する。左辺は積の微分公式、右辺は指数関数のチェーンルール ($(x - y)' = 1 - y'$) を使う。

$$y + xy' = e^{x-y}(1 - y')$$

$(1, 1)$ を代入すると $e^{x-y} = e^0 = 1$ なので

$$1 + 1 \cdot y' = 1 \cdot (1 - y')$$

$$1 + y' = 1 - y' \quad \Rightarrow \quad 2y' = 0$$

$$y' = 0$$

$y = e^x \sin x$ の第2次導関数 y'' を求め、 $y''(0)$ の値を求めよ。

$$y''(0) = \underline{2}$$

まず1回微分する（積の微分公式）。

$$y' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$$

もう一度、積の微分公式で微分する。

$$y'' = e^x (\sin x + \cos x) + e^x (\cos x - \sin x) = e^x \{ (\sin x + \cos x) + (\cos x - \sin x) \} = 2e^x \cos x$$

$x = 0$ を代入すると $e^0 = 1$, $\cos 0 = 1$ なので $y''(0) = 2 \cdot 1 \cdot 1$ 。

$$y'' = 2e^x \cos x, \quad y''(0) = 2$$