

微分の計算（積・商・合成）

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～8）

1

積の微分・基本

$y = x^2(x - 3)$ を微分したとき、 y' の x^2 の係数と x の係数を求めよ。

x^2 の係数 3 x の係数 -6

$$f(x) = x^2, f'(x) = 2x, g(x) = x - 3, g'(x) = 1。$$

$$y' = 2x(x - 3) + x^2 \cdot 1 = 2x^2 - 6x + x^2$$

$$y' = 3x^2 - 6x$$

2

積の微分・次数が上がる

$y = (x^3 + 2)(x - 1)$ を微分したとき、 y' の x^3 の係数と x^2 の係数を求めよ。

x^3 の係数 4 x^2 の係数 -3

$$f(x) = x^3 + 2, f'(x) = 3x^2, g(x) = x - 1, g'(x) = 1。$$

$$y' = 3x^2(x - 1) + (x^3 + 2) \cdot 1 = 3x^3 - 3x^2 + x^3 + 2$$

$$y' = 4x^3 - 3x^2 + 2$$

3

積の微分・特定点での値

$y = (2x - 1)(x^2 + 3)$ を微分し、 $y'(2)$ の値を求めよ。

$y'(2) =$ 26

$$f(x) = 2x - 1, f'(x) = 2, g(x) = x^2 + 3, g'(x) = 2x。$$

$$y' = 2(x^2 + 3) + (2x - 1)(2x) = 2x^2 + 6 + 4x^2 - 2x = 6x^2 - 2x + 6$$

$$x = 2 \text{ を代入すると } y'(2) = 6 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 6 = 24 - 4 + 6。$$

$$y'(2) = 26$$

4

商の微分・基本

$y = \frac{x-3}{x+2}$ を微分すると $y' = \frac{A}{(x+2)^2}$ の形になる。 A の値を求めよ。

$$A = \underline{5}$$

$$f(x) = x - 3, f'(x) = 1, g(x) = x + 2, g'(x) = 1。$$

$$y' = \frac{1 \cdot (x+2) - (x-3) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x+3}{(x+2)^2}$$

$$y' = \frac{5}{(x+2)^2} \quad (A = 5)$$

5

商の微分・特定点での値

$y = \frac{3x}{x+1}$ を微分し、 $y'(1)$ の値を求めよ。

$$y'(1) = \underline{3/4}$$

$$f(x) = 3x, f'(x) = 3, g(x) = x + 1, g'(x) = 1。$$

$$y' = \frac{3(x+1) - 3x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{3x+3-3x}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

$$x = 1 \text{ を代入すると } y'(1) = \frac{3}{2^2}。$$

$$y'(1) = \frac{3}{4}$$

$y = (3x + 2)^3$ を微分すると $y' = A(3x + 2)^2$ の形になる。 A の値と $y'(0)$ の値を求めよ。

$$A = \underline{9} \quad y'(0) = \underline{36}$$

$u = 3x + 2$ とおくと $y = u^3$ 。

$$\frac{dy}{du} = 3u^2, \quad \frac{du}{dx} = 3$$

$$y' = 3u^2 \cdot 3 = 9u^2 = 9(3x + 2)^2$$

$x = 0$ を代入すると $u = 2$ なので $y'(0) = 9 \cdot 2^2 = 9 \cdot 4$ 。

$$A = 9, y'(0) = 36$$

$y = (x^2 - 2x)^2$ を微分し、 $y'(3)$ の値を求めよ。

$$y'(3) = \underline{24}$$

$u = x^2 - 2x$ とおくと $y = u^2$ 。

$$\frac{dy}{du} = 2u, \quad \frac{du}{dx} = 2x - 2$$

$$y' = 2u(2x - 2) = 2(x^2 - 2x)(2x - 2)$$

$x = 3$ のとき $u = 9 - 6 = 3$ 、 $2x - 2 = 4$ なので $y'(3) = 2 \cdot 3 \cdot 4$ 。

$$y'(3) = 24$$

$y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ を微分すると $y' = Ax^{-4}$ の形になる。 A の値を求めよ。

$$A = \underline{-3}$$

公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ に $n = -3$ をあてはめる。

$$y' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4}$$

$$A = -3$$

標準 (9~14) ※どの公式を使うかは自分で判定

9 $y = \frac{x^2}{x+1}$ を微分し、 $y'(1)$ の値を求めよ。

$$y'(1) = \underline{3/4}$$

$f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $g(x) = x+1$, $g'(x) = 1$ 。

$$y' = \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

$x = 1$ を代入すると $y'(1) = \frac{1+2}{4}$ 。

$$y'(1) = \frac{3}{4}$$

10

積の微分+合成関数の組み合わせ

$y = x(x^2 + 1)^2$ を微分し、 $y'(1)$ の値を求めよ。

$$y'(1) = \underline{12}$$

$f(x) = x$, $f'(x) = 1$ 。 $g(x) = (x^2 + 1)^2$ はチェーンルールで $g'(x) = 2(x^2 + 1) \cdot 2x = 4x(x^2 + 1)$ 。

$$y' = 1 \cdot (x^2 + 1)^2 + x \cdot 4x(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2 + 4x^2(x^2 + 1)$$

$(x^2 + 1)$ でくくると $y' = (x^2 + 1)\{(x^2 + 1) + 4x^2\} = (x^2 + 1)(5x^2 + 1)$ 。
 $x = 1$ を代入すると $y'(1) = 2 \cdot 6$ 。

$$y'(1) = 12$$

11

商の微分 (分母が合成関数)

$y = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$ を微分し、 $y'(1)$ の値を求めよ。

$$y'(1) = \underline{-1/2}$$

$y = (x^2 + 1)^{-2}$ と書きかえてチェーンルールを使う。 $u = x^2 + 1$ とおくと

$$y' = -2u^{-3} \cdot 2x = -\frac{4x}{(x^2 + 1)^3}$$

$x = 1$ を代入すると $y'(1) = -\frac{4}{2^3} = -\frac{4}{8}$ 。

$$y'(1) = -\frac{1}{2}$$

12

合成関数（負の指数を使う）

$y = \frac{1}{3x-2}$ を微分し、 $y'(2)$ の値を求めよ。

$$y'(2) = \underline{-3/16}$$

$y = (3x-2)^{-1}$ と書きかえる。 $u = 3x-2$ とおくと

$$y' = -1 \cdot u^{-2} \cdot 3 = -\frac{3}{(3x-2)^2}$$

$x = 2$ を代入すると $3x-2 = 4$ なので $y'(2) = -\frac{3}{4^2}$ 。

$$y'(2) = -\frac{3}{16}$$

13

xnの拡張・分数の指数

$y = x^{\frac{3}{2}}$ を微分し、 $y'(4)$ の値を求めよ。

$$y'(4) = \underline{3}$$

公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ に $n = \frac{3}{2}$ をあてはめる。

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$x = 4$ を代入すると $\sqrt{4} = 2$ なので $y'(4) = \frac{3}{2} \cdot 2$ 。

$$y'(4) = 3$$

$y = \frac{(x+1)^2}{x-1}$ を微分し、 $y'(0)$ の値を求めよ。

$$y'(0) = \underline{-3}$$

$f(x) = (x+1)^2$, $f'(x) = 2(x+1)$ (チェーンルール)。 $g(x) = x-1$, $g'(x) = 1$ 。

$$y' = \frac{2(x+1)(x-1) - (x+1)^2 \cdot 1}{(x-1)^2}$$

分子を $(x+1)$ でくくると $(x+1)\{2(x-1) - (x+1)\} = (x+1)(x-3)$ 。

$$y' = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

$x = 0$ を代入すると $y'(0) = \frac{1 \cdot (-3)}{(-1)^2}$ 。

$$y'(0) = -3$$

15

2重の合成関数

$y = \{(2x + 1)^2 + 3\}^2$ を微分し、 $y'(0)$ の値を求めよ。

$$y'(0) = \underline{32}$$

$v = 2x + 1$ 、 $w = v^2 + 3$ 、 $y = w^2$ と2段階でおきかえる。

$$\frac{dy}{dw} = 2w, \quad \frac{dw}{dv} = 2v, \quad \frac{dv}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = 2w \cdot 2v \cdot 2 = 8vw$$

$x = 0$ のとき $v = 1$ 、 $w = 1^2 + 3 = 4$ なので $y'(0) = 8 \cdot 1 \cdot 4$ 。

$$y'(0) = 32$$

$y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$ を微分し、 $y'(3)$ の値を求めよ。

$$y'(3) = \underline{-2}$$

$u = \frac{x+1}{x-1}$ とおくと $y = u^2$ 、 $\frac{dy}{du} = 2u$ 。

商の微分公式で $\frac{du}{dx}$ を求める。

$$\frac{du}{dx} = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$x = 3 \text{ のとき } u = \frac{4}{2} = 2, \quad \frac{du}{dx} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}。$$

$$y'(3) = 2u \cdot \frac{du}{dx} = 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$y'(3) = -2$$

$y = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{\sqrt{x}}$ を微分し、 $y'(1)$ の値を求めよ。

$$y'(1) = \underline{-9/2}$$

$y = 2x^{-3} - 3x^{-\frac{1}{2}}$ と書きかえてから公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ を使う。

$$y' = 2 \cdot (-3)x^{-4} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = -6x^{-4} + \frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$x = 1$ を代入すると $x^{-4} = 1$, $x^{-\frac{3}{2}} = 1$ なので $y'(1) = -6 + \frac{3}{2}$ 。

$$y'(1) = -\frac{9}{2}$$

$y = x^2(x^2 - 1)$ を微分したとき、 y' の x^3 の係数と x の係数を求めよ。

x^3 の係数 4 x の係数 -2

展開してからまとめて微分してもよいが、ここでは $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$ 、 $g(x) = x^2 - 1$, $g'(x) = 2x$ として積の微分公式を使う。

$$y' = 2x(x^2 - 1) + x^2 \cdot 2x = 2x^3 - 2x + 2x^3$$

$$y' = 4x^3 - 2x$$

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。逆関数の微分の入り口や、合成関数のさらに深い使い方に挑戦しよう。

応1

逆関数の微分の入り口

$f(x) = x^3 + x$ は実数全体で単調に増加するので、逆関数 f^{-1} が存在する。逆関数の微分は $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$ で計算できる。これを使って $(f^{-1})'(2)$ の値を求めよ。

$$(f^{-1})'(2) = \underline{1/4}$$

まず $f^{-1}(2)$ の値、つまり $f(x) = 2$ となる x を探す。

$$f(1) = 1^3 + 1 = 2 \text{ なので } f^{-1}(2) = 1。$$

$$\text{次に } f'(x) = 3x^2 + 1 \text{ より } f'(1) = 3 \cdot 1 + 1 = 4。$$

逆関数の微分の公式 $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$ に $a = 2$ を代入すると、

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$$

これは「 $y = f(x)$ のグラフと $y = f^{-1}(x)$ のグラフは直線 $y = x$ に関して対称なので、対応する点での接線の傾きは互いに逆数になる」という関係の具体例になっている。

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{4}$$

$y = \frac{1}{(x^2 + 1)^3}$ を微分し、 $y'(1)$ の値を求めよ。

$$y'(1) = \underline{-3/8}$$

$y = (x^2 + 1)^{-3}$ と書きかえる。 $u = x^2 + 1$ とおくと $y = u^{-3}$ 。

$$\frac{dy}{du} = -3u^{-4}, \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

$$y' = -3u^{-4} \cdot 2x = -\frac{6x}{(x^2 + 1)^4}$$

$x = 1$ を代入すると $u = 2$ なので $y'(1) = -\frac{6}{2^4} = -\frac{6}{16}$ 。

$$y'(1) = -\frac{3}{8}$$

$y = \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2}$ を微分し、 $y'(2)$ の値を求めよ。

$$y'(2) = \underline{-12/125}$$

$f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$ 。 $g(x) = (x^2 + 1)^2$ はチェーンルールで $g'(x) = 2(x^2 + 1) \cdot 2x = 4x(x^2 + 1)$ 。商の微分公式より

$$y' = \frac{2x(x^2 + 1)^2 - x^2 \cdot 4x(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4}$$

分子を $(x^2 + 1)$ でくくると

$$= \frac{(x^2 + 1)\{2x(x^2 + 1) - 4x^3\}}{(x^2 + 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 1) - 4x^3}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x^3 + 2x - 4x^3}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^3}$$

$x = 2$ を代入すると分子は $2 \cdot 2 - 2 \cdot 8 = 4 - 16 = -12$ 、分母は $(4 + 1)^3 = 125$ 。
。

$$y'(2) = -\frac{12}{125}$$

曲線が $x = t$, $y = g(t)$ のように媒介変数（パラメータ）で表される場合の微分は次のページ（いろいろな関数の導関数）で扱う。ここでは x^n の指数拡張とチェーンルールを組み合わせた問題に取り組もう。 $y = (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$ を微分し、 $y'(2)$ の値を求めよ。

$$y'(2) = \underline{6\sqrt{5}}$$

$u = x^2 + 1$ とおくと $y = u^{\frac{3}{2}}$ 。

$$\frac{dy}{du} = \frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

$$y' = \frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3xu^{\frac{1}{2}} = 3x\sqrt{x^2 + 1}$$

$x = 2$ を代入すると $x^2 + 1 = 5$ なので $y'(2) = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$ 。

$$y'(2) = 6\sqrt{5}$$

$y = \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right)^3$ を微分し、 $y'(2)$ の値を求めよ。

$$y'(2) = \underline{\underline{-36/625}}$$

$u = \frac{x}{x^2 + 1}$ とおくと $y = u^3$ 、 $\frac{dy}{du} = 3u^2$ 。

商の微分公式で $\frac{du}{dx}$ を求める。

$$\frac{du}{dx} = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

チェーンルールより

$$y' = 3u^2 \cdot \frac{du}{dx} = 3 \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right)^2 \cdot \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^4}$$

$x = 2$ を代入すると分子は $3 \cdot 4 \cdot (1 - 4) = 12 \cdot (-3) = -36$ 、分母は $(4 + 1)^4 = 625$ 。

$$y'(2) = -\frac{36}{625}$$