

数III まとめ

問題プリント（全42問）

氏名 _____

得点 /42点

DRILL

まとめテスト（標準）

基本（1～20）

1 $|r| < 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ を求めよ。

極限值

2 分数式・最高次で割る

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-3}{2n+7}$ を求めよ。

極限值

3 無限等比級数の和

初項12、公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数の和を求めよ。

和

4 約分

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ を求めよ。

極限值

5 $\sin$ の基本公式

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$ を求めよ。

極限值

6 $x \rightarrow \infty$ ・分子の次数が低い

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x^2-1}$ を求めよ。

極限值

7 連続になるように定数を定める

次の関数が $x=3$ で連続となるように、定数 a の値を定めよ。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & (x \neq 3) \\ a & (x = 3) \end{cases}$$

$a =$

8 積の微分・基本

$y = x^2(3x-2)$ を微分したとき、 y' の x^2 の係数と x の係数を求めよ。

x^2 の係数 x の係数

9 商の微分・特定点での値

$y = \frac{3x-2}{x+1}$ を微分し、 $y'(0)$ の値を求めよ。

$y'(0) =$

10 合成関数・基本

$y = (2x+3)^4$ を微分すると $y' = A(2x+3)^3$ の形になる。 A の値と $y'(-1)$ の値を求めよ。

$A =$ $y'(-1) =$

11

sin・cosの微分係数

$y = \sin x$ の $x = \frac{\pi}{3}$ における微分係数と、
 $y = \cos x$ の $x = \frac{\pi}{6}$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

$$\sin : y' \left(\frac{\pi}{3} \right) = \quad \cos : \\ y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \quad$$

12

ln x・e^xの微分係数

$y = \ln x$ の $x = \frac{1}{4}$ における微分係数と、 $y = e^x$ の $x = 1$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

$$\ln x : y' \left(\frac{1}{4} \right) = \quad e^x : \\ y'(1) = \quad$$

13

接線・べき関数

曲線 $y = x^3 - 3x + 1$ 上の $x = 2$ における接線の傾きと y 切片を求めよ。

$$\text{傾き} \quad y \text{ 切片}$$

14

極値・3次関数

$y = x^3 - 6x^2 + 9x$ の極値を求めよ。

$$\text{極大値} \quad (x =) \\ \text{極小値} \quad (x =)$$

15

不定積分の基本公式 (総合)

$\int \left(4x^3 - \frac{2}{x} + 5 \cos x \right) dx$ を求めよ (C は省略してよい)。 x^4 の係数、 $\ln|x|$ の係数、 $\sin x$ の係数をそれぞれ求めよ。

$$x^4 \text{ の係数} \quad \ln|x| \text{ の係数} \\ \sin x \text{ の係数}$$

16

置換積分 (べき乗型・定積分)

$$\int_0^1 8x(x^2 + 1)^3 dx \text{ を求めよ。}$$

値

17

部分積分 (x・e^x型・定積分)

$$\int_0^2 x e^x dx \text{ を求めよ。}$$

値

18

奇関数の性質

$$\int_{-2}^2 (7x^3 - 4x) dx \text{ を求めよ。}$$

値

19

曲線とx軸の間の面積

曲線 $y = 3x^2$ と x 軸、直線 $x = 2$ で囲まれた部分の面積 S ($0 \leq x \leq 2$) を求めよ。

$$S =$$

20

回転体の体積 (円錐型の確認)

直線 $y = x$ と x 軸、直線 $x = 4$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は $V = \frac{\text{ア}}{3} \pi$ と表せる。アを求めよ。

$$\text{ア} =$$

標準 (21~34)

21

根号の有理化 (数列)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 3n} - n \right) \text{ を求めよ。}$$

極限值

22

2文字の係数決定

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + ax + b}{x - 3} = 7 \text{ が成り立つように定数 } a, b \text{ の値を定めよ。}$$

$$a = \quad b = \quad$$

23

対数微分法

$y = (x - 1)^3(x + 2)^2$ を対数微分法で微分し、 $y'(3)$ の値を求めよ。

$$y'(3) =$$

24

陰関数の微分

$x^2 - xy + y^2 = 7$ について、点 $(3, 1)$ における $\frac{dy}{dx}$ の値を求めよ。

$$y' = \boxed{}$$

25

半角公式（定積分）

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx \text{ を求めよ。}$$

$$\text{値} \quad \boxed{}$$

26

部分分数分解

$$\int \frac{1}{x^2 - 16} \, dx = \frac{1}{A} \ln \left| \frac{x-4}{x+4} \right| + C \text{ の } A \text{ を求めよ。}$$

$$A = \boxed{}$$

27

総合：極限×微分（微分係数の定義）

$$f(x) = x^2 - 3x \text{ について、}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \text{ を求めよ。}$$

$$\text{極限值} \quad \boxed{}$$

28

総合：微分×積分（接線を求めてから面積へ）

曲線 $y = x^2$ の $x = 1$ における接線の方程式を求めよ。また、この曲線と接線ではさまれた部分のうち $0 \leq x \leq 2$ の部分の面積 S を求めよ。

$$\text{接線：傾き} \quad \boxed{} \quad y \text{ 切片} \quad \boxed{}$$

$$S = \boxed{}$$

29

総合：極限×積分（区分求積法）

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{5k^4}{n^5} \text{ を求めよ。}$$

$$\text{値} \quad \boxed{}$$

30

tanとsinの極限公式の組み合わせ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 2x} \text{ を求めよ。}$$

$$\text{極限值} \quad \boxed{}$$

31

総合：微分×積分（加速度から速度・位置へ）

直線上を運動する点の加速度が $a(t) = 6t - 4$ ($t \geq 0$) で表され、速度は $v(0) = 1$ 、位置は $x(0) = 0$ を満たすとする。速度 $v(t)$ を求めるときに定まる定数 ($v(0) = 1$ から決まる積分定数) の値と、位置の式 $x(t)$ を使った $x(2)$ の値を求めよ。

$$\text{積分定数} \quad \boxed{} \quad x(2) = \boxed{}$$

32

y軸回転の体積

曲線 $y = x^2$ ($x \geq 0$) と y 軸、直線 $y = 4$ で囲まれた部分を、 y 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は $V = A\pi$ と表せる。 A を求めよ。

$$A = \boxed{}$$

33

総合：極限×微分×積分（軽量版）

$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n-1}{3n+2}$ とする。 $g(x) = ax^2 - 4x$ の最小値を求めよ。また $\int_0^a 2x \, dx$ の値を求めよ。

$$a = \boxed{} \quad g(x) \text{ の最小値}$$

$$\boxed{} \quad (x = \boxed{})$$

$$\int_0^a 2x \, dx = \boxed{}$$

34

不等式証明・最小値を利用

$x > 0$ のとき $e^x > 1 + x$ が成り立つことを証明せよ。

発展 (35~40)

35

総合：微分×積分（極値とグラフの概形→面積）

$f(x) = x^3 - 3x^2$ の極値を求めよ。また、この曲線と x 軸で囲まれた部分のうち $0 \leq x \leq 3$ の部分の面積 S を求めよ。

$$\text{極大値} \quad \boxed{} \quad (x = \boxed{})$$

$$\text{極小値} \quad \boxed{} \quad (x = \boxed{})$$

$$S = \boxed{}$$

36

総合：極限×積分（eの定義の応用）

$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$ を e を用いて表せ。また、
 $\int_0^{\ln L} e^x dx$ の値を求めよ。

$$L = \boxed{} \quad \int_0^{\ln L} e^x dx = \boxed{}$$

37

総合：微分×積分（速度の符号変化と道のり）

直線上を運動する点の位置が $x(t) = -t^3 + 6t^2$ ($0 \leq t \leq 6$) で表されるとき、 x が最大になる時刻とそのときの位置を求めよ。また、 $0 \leq t \leq 6$ における道のり（速度の符号が変わることに注意した移動距離の総和）を求めよ。

x が最大： $t = \boxed{}$ 位置 $\boxed{}$
 道のり $\boxed{}$

38

総合：極限×微分（微分係数の定義と有理化）

$f(x) = \sqrt{x+1}$ について、極限の定義 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ を有理化によって計算し、 $f'(3)$ を求めよ。また、この結果を使って曲線 $y = f(x)$ の $x = 3$ における接線の傾きと y 切片を求めよ。

$f'(3) = \boxed{}$ 接線：傾き $\boxed{}$
 y 切片 $\boxed{}$

39

総合：微分×積分（不等式の証明と定積分の評価）

$x > 0$ のとき $\ln(1+x) < x$ が成り立つことを証明せよ。また、この不等式を利用すると $\int_0^1 \ln(1+x) dx$ は $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ より小さいと分かる。実際に $\int_0^1 \ln(1+x) dx$ の値を部分積分によって求めよ。

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx = \boxed{}$$

40

総合：極限×微分×積分（章の総仕上げ）

$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x}{x^2 + 2}$ とする。 $f(x) = x^3 - 3ax^2$ の極値を求めよ。さらに、この曲線と x 軸で囲まれた部分のうち $0 \leq x \leq 6$ の部分の面積 S を求めよ。

$a = \boxed{}$ 極大値 $\boxed{}$ ($x = \boxed{}$) 極小値 $\boxed{}$ ($x = \boxed{}$)
 $S = \boxed{}$

D R I L L

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1 微分係数の定義 $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ と、区分求積法の定義 $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ は、どちらも「極限」という同じ考え方から生まれている。 $f(x) = x^2$ を例にとり、実際に $f'(1)$ と $\int_0^1 x^2 dx$ の両方をこの定義どおりに計算することで、極限が微分と積分の両方の土台になっていることを説明せよ。

記2 関数 $f(x) = xe^{-x}$ ($x \geq 0$) について、(1) $f'(x)$ を求め、 $f(x)$ の最大値を求めよ。(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸、直線 $x = 2$ で囲まれた部分の面積を、部分積分を用いて求めよ。(3) (1)の計算と(2)の計算は、それぞれどのような極限の考え方を土台にしているかを説明せよ。

E X A M
共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 12分／配点 20点

太郎さんと花子さんは、ボールを落としたときの跳ね返り方について、極限の考え方を使って調べている。高さ4mからボールを静かに落とすと、床に当たるたびに跳ね返る高さは直前の高さのちょうど $\frac{1}{2}$ 倍になるという。 n 回目に跳ね返った後に達する最高点の高さを a_n (m) とする。

花子「1回目の跳ね返りの高さ a_1 は、最初の高さ4mの半分になるね。」

太郎「その調子で、 a_n を n の式で表してみよう。」

- (1) $a_n = 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n$ と表せる。これを用いると $a_1 = \boxed{\text{ア}}$ (m) であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \boxed{\text{イ}}$ である。ア、イを求めよ。

ア イ

- (2) 花子「ボールが上下に動いた距離の合計は、最初の落下4mと、跳ね返るたびの『上がって下がる』分をすべて足したことになるね。」

ボールが無限に跳ね返り続けるとして、動いた距離の総和を求めると $\boxed{\text{ウエ}}$ (m) である。ウエを求めよ。

ウエ

- (3) 太郎「跳ね返りの高さが0.1m未満になるのは何回目からか、実際に数値を代入して確かめてみよう。」 $a_n < 0.1$ を満たす最小の n を求めると $n = \boxed{\text{オ}}$ である。オを求めよ。

オ

大問2 目標時間 12分／配点 20点

科学部の花子さんは、打ち上げ花火が開いてからの明るさの変化を、時刻 t （秒後、 $t \geq 0$ ）の関数 $y = te^{-t/2}$ で近似できると考え、先生と一緒に微分を使って調べている。

先生「まずは y を t で微分してみよう。積の微分公式が使えるね。」

(1) y' を求めると $y' = \left(1 - \frac{\text{ア}}{\text{イ}}t\right)e^{-t/2}$ となる。ア、イを求めよ。

ア イ

(2) 先生「 y' の符号が変わる時刻を調べれば、明るさが最大になる瞬間が分かるね。」

明るさが最大になるのは $t = \text{ウ}$ （秒）のときであり、そのときの明るさの値は $y = \frac{\text{エ}}{e}$ である。ウ、エを求めよ。

ウ エ

(3) 花子「最大になったあとは、明るさがどんどん小さくなっていくはずですね。」 $t = 4$ における明るさの値を求めると $y = \frac{\text{オ}}{e^{\text{カ}}}$ である。オ、カを求めよ。

オ カ

大問3 目標時間 11分／配点 20点

陶芸教室に通う太郎さんは、鉢の内側の形を、曲線 $y = \sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 4$) を y 軸のまわりに1回転させてできる形として設計している（底が細く、上に向かって広がる、鉢らしい形になる）。先生と一緒に、区分求積法の考え方から出発して、面積・体積を順番に計算している。

先生「区分求積法の式が定積分に直せることを、まずは面積 S の計算で確認しておこう。」

(1) 面積 $S = \int_0^4 \sqrt{x} dx$ を区分求積法の定義から確かめる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4k}{n}}$ は $\int_0^4 \sqrt{x} dx$ の値に等しい。

実際に積分を計算すると $S = \frac{\text{アイ}}{\text{ウ}}$ である。アイ、ウを求めよ。

アイ ウ

(2) 太郎「曲線 $y = \sqrt{x}$ は、 $x = y^2$ と書き直せますね。」先生「そうだね。まず $y = 2$ （鉢の縁の高さ）のときの半径 x を確認しよう。それから、(1) で求めた面積 S を使えば、曲線と y 軸ではさまれた部分の面積 T も求められるよ。」

$y = 2$ のとき $x = \frac{\text{エ}}{\text{}}$ である。また、幅4・高さ2の長方形の面積から S を引くと $T = \frac{\text{オ}}{\text{カ}}$ である。エ、オ、カを求めよ。

エ オ カ

(3) 先生「鉢の内側の空洞は、 $x = y^2$ を y 軸のまわりに $0 \leq y \leq 2$ の範囲で回転させてできる立体だね。この体積を求めよう。」

体積は $V = \pi \int_0^2 x^2 dy$ と表せる。(2) で確認した $x = y^2$ を使ってこれを計算すると、 $V = \frac{\text{キク}}{\text{ケ}} \pi$ である。キク、ケを求めよ。

キク ケ