

数III まとめ

問題プリント（全42問）

氏名 _____

得点 _____ / 42点

DRILL

まとめテスト（標準）

基本（1～20）

1

$|r| < 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5} \right)^n$ を求めよ。

極限值

計算スペース

2

分数式・最高次で割る

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 3}{2n + 7}$ を求めよ。

極限值

計算スペース

3

無限等比級数の和

初項12、公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数の和を求めよ。

和

計算スペース

4

約分

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ を求めよ。

極限值

計算スペース

5

sinの基本公式

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$ を求めよ。

極限值

計算スペース

6

 $x \rightarrow \infty$ ・分子の次数が低い

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{x^2 - 1}$ を求めよ。

極限值

計算スペース

7

連続になるように定数を定める

次の関数が $x = 3$ で連続となるように、定数 a の値を定めよ。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & (x \neq 3) \\ a & (x = 3) \end{cases}$$

 $a =$

計算スペース

8

積の微分・基本

$y = x^2(3x - 2)$ を微分したとき、 y' の x^2 の係数と x の係数を求めよ。

 x^2 の係数 x の係数

計算スペース

9

商の微分・特定点での値

$y = \frac{3x - 2}{x + 1}$ を微分し、 $y'(0)$ の値を求めよ。

 $y'(0) =$

計算スペース

10

合成関数・基本

$y = (2x + 3)^4$ を微分すると $y' = A(2x + 3)^3$ の形になる。 A の値と $y'(-1)$ の値を求めよ。

$$A = \boxed{} \quad y'(-1) = \boxed{}$$

計算スペース

11

sin・cosの微分係数

$y = \sin x$ の $x = \frac{\pi}{3}$ における微分係数と、 $y = \cos x$ の $x = \frac{\pi}{6}$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

$$\sin : y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{} \quad \cos : y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{}$$

計算スペース

12

 $\ln x \cdot e^x$ の微分係数

$y = \ln x$ の $x = \frac{1}{4}$ における微分係数と、 $y = e^x$ の $x = 1$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

$$\ln x : y' \left(\frac{1}{4} \right) = \boxed{} \quad e^x : y'(1) = \boxed{}$$

計算スペース

13

接線・べき関数

曲線 $y = x^3 - 3x + 1$ 上の $x = 2$ における接線の傾きと y 切片を求めよ。

傾き $\boxed{}$ y 切片 $\boxed{}$

計算スペース

14

極値・3次関数

 $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ の極値を求めよ。極大値 ($x =$) 極小値 ($x =$)

計算スペース

15

不定積分の基本公式（総合）

 $\int \left(4x^3 - \frac{2}{x} + 5 \cos x \right) dx$ を求めよ (C は省略してよい)。 x^4 の係数、 $\ln|x|$ の係数、 $\sin x$ の係数をそれぞれ求めよ。 x^4 の係数 $\ln|x|$ の係数 $\sin x$ の係数

計算スペース

16

置換積分（べき乗型・定積分）

$$\int_0^1 8x(x^2 + 1)^3 dx \text{ を求めよ。}$$

値

計算スペース

17

部分積分（ $x \cdot e^x$ 型・定積分）

$$\int_0^2 x e^x dx \text{ を求めよ。}$$

値

計算スペース

18

奇関数の性質

$\int_{-2}^2 (7x^3 - 4x) dx$ を求めよ。

値

計算スペース

19

曲線とx軸の間の面積

曲線 $y = 3x^2$ と x 軸、直線 $x = 2$ で囲まれた部分の面積 S ($0 \leq x \leq 2$) を求めよ。

 $S =$

計算スペース

20

回転体の体積（円錐型の確認）

直線 $y = x$ と x 軸、直線 $x = 4$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに1回転させて
できる立体の体積は $V = \frac{\text{ア}}{3}\pi$ と表せる。アを求めよ。

ア=

計算スペース

標準（21～34）

21

根号の有理化（数列）

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 3n} - n \right)$ を求めよ。

極限值

計算スペース

22

2文字の係数決定

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + ax + b}{x - 3} = 7$ が成り立つように定数 a, b の値を定めよ。

$a =$ $b =$

計算スペース

23

対数微分法

$y = (x - 1)^3(x + 2)^2$ を対数微分法で微分し、 $y'(3)$ の値を求めよ。

$y'(3) =$

計算スペース

24

陰関数の微分

$x^2 - xy + y^2 = 7$ について、点 $(3, 1)$ における $\frac{dy}{dx}$ の値を求めよ。

 $y' =$

計算スペース

25

半角公式（定積分）

$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$ を求めよ。

値

計算スペース

26

部分分数分解

$$\int \frac{1}{x^2 - 16} dx = \frac{1}{A} \ln \left| \frac{x-4}{x+4} \right| + C \quad \text{の} A \text{を求めよ。}$$

A =

計算スペース

27

総合：極限×微分（微分係数の定義）

$$f(x) = x^2 - 3x \text{ について、} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \text{ を求めよ。}$$

極限值

計算スペース

28

総合：微分×積分（接線を求めてから面積へ）

曲線 $y = x^2$ の $x = 1$ における接線の方程式を求めよ。また、この曲線と接線ではさまれた部分のうち $0 \leq x \leq 2$ の部分の面積 S を求めよ。

接線：傾き

 y 切片 $S =$

計算スペース

29

総合：極限×積分（区分求積法）

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{5k^4}{n^5}$ を求めよ。

値

計算スペース

30

tanとsinの極限公式の組み合わせ

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 2x}$ を求めよ。

極限值

計算スペース

31

総合：微分×積分（加速度から速度・位置へ）

直線上を運動する点の加速度が $a(t) = 6t - 4$ ($t \geq 0$) で表され、速度は $v(0) = 1$ 、位置は $x(0) = 0$ を満たすとする。速度 $v(t)$ を求めるときに定まる定数 ($v(0) = 1$ から決まる積分定数) の値と、位置の式 $x(t)$ を使った $x(2)$ の値を求めよ。

積分定数

$x(2) =$

計算スペース

32

y軸回転の体積

曲線 $y = x^2$ ($x \geq 0$) と y 軸、直線 $y = 4$ で囲まれた部分を、 y 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は $V = \text{ア} \pi$ と表せる。アを求めよ。

ア=

計算スペース

33

総合：極限×微分×積分（軽量版）

$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n - 1}{3n + 2}$ とする。 $g(x) = ax^2 - 4x$ の最小値を求めよ。また $\int_0^a 2x \, dx$ の値を求めよ。

$a =$ $g(x)$ の最小値 ($x =$) $\int_0^a 2x \, dx =$

計算スペース

34

不等式証明・最小値を利用

$x > 0$ のとき $e^x > 1 + x$ が成り立つことを証明せよ。

計算スペース

発展 (35~40)

35

総合：微分×積分（極値とグラフの概形→面積）

$f(x) = x^3 - 3x^2$ の極値を求めよ。また、この曲線と x 軸で囲まれた部分のうち $0 \leq x \leq 3$ の部分の面積 S を求めよ。

極大値 ($x =$) 極小値 ($x =$)

$S =$

計算スペース

36

総合：極限×積分（eの定義の応用）

$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$ をeを用いて表せ。また、 $\int_0^{\ln L} e^x dx$ の値を求めよ。

$$L = \boxed{} \quad \int_0^{\ln L} e^x dx = \boxed{}$$

計算スペース

37

総合：微分×積分（速度の符号変化と道のり）

直線上を運動する点の位置が $x(t) = -t^3 + 6t^2$ ($0 \leq t \leq 6$) で表されるとき、 x が最大になる時刻とそのときの位置を求めよ。また、 $0 \leq t \leq 6$ における道のり（速度の符号が変わることに注意した移動距離の総和）を求めよ。

$$x \text{ が最大: } t = \boxed{} \quad \text{位置} \quad \boxed{} \quad \text{道のり} \quad \boxed{}$$

計算スペース

$f(x) = \sqrt{x+1}$ について、極限の定義 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ を有理化によって計算し、 $f'(3)$ を求めよ。また、この結果を使って曲線 $y = f(x)$ の $x = 3$ における接線の傾きと y 切片を求めよ。

$f'(3) =$ 接線：傾き y 切片

計算スペース

$x > 0$ のとき $\ln(1+x) < x$ が成り立つことを証明せよ。また、この不等式を利用すると $\int_0^1 \ln(1+x) dx$ は $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ より小さいと分かる。実際に $\int_0^1 \ln(1+x) dx$ の値を部分積分によって求めよ。

$\int_0^1 \ln(1+x) dx =$

計算スペース

$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x}{x^2 + 2}$ とする。 $f(x) = x^3 - 3ax^2$ の極値を求めよ。さらに、この曲線とx軸で囲まれた部分のうち $0 \leq x \leq 6$ の部分の面積 S を求めよ。

$a =$ 極大値 ($x =$) 極小値 (
 $x =$) $S =$

計算スペース

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1 微分係数の定義 $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ と、区分解法法の定義

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

は、どちらも「極限」という同じ考え方から生まれている。 $f(x) = x^2$ を例にとり、実際に $f'(1)$ と $\int_0^1 x^2 dx$ の両方をこの定義どおりに計算することで、極限が微分と積分の両方の土台になっていることを説明せよ。

E X A M

共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 12分／配点 20点

太郎さんと花子さんは、ボールを落としたときの跳ね返り方について、極限の考え方を使って調べている。高さ4mからボールを静かに落とすと、床に当たるたびに跳ね返る高さは直前の高さのちょうど $\frac{1}{2}$ 倍になるという。 n 回目に跳ね返った後に達する最高点の高さを a_n (m) とする。

花子「1回目の跳ね返りの高さ a_1 は、最初の高さ4mの半分になるね。」

太郎「その調子で、 a_n を n の式で表してみよう。」

(1)

$a_n = 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n$ と表せる。これを用いると $a_1 = \boxed{\text{ア}}$ (m) であり、

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \boxed{\text{イ}}$ である。ア、イを求めよ。

ア イ

(2)

花子「ボールが上下に動いた距離の合計は、最初の落下4mと、跳ね返るたびの『上がって下がる』分をすべて足したものになるね。」

ボールが無限に跳ね返り続けるとして、動いた距離の総和を求めると $\boxed{\text{ウエ}}$ (m) である。ウエを求めよ。

ウエ

(3)

太郎「跳ね返りの高さが0.1m未満になるのは何回目からか、実際に数値を代入して確かめてみよう。」 $a_n < 0.1$ を満たす最小の n を求めると $n = \boxed{\text{オ}}$ である。オを求めよ。

オ

大問2 目標時間 12分／配点 20点

科学部の花子さんは、打ち上げ花火が開いてからの明るさの変化を、時刻 t （秒後、 $t \geq 0$ ）の関数 $y = te^{-t/2}$ で近似できると考え、先生と一緒に微分を使って調べている。

先生「まずは y を t で微分してみよう。積の微分公式が使えるね。」

(1) y' を求めると $y' = \left(1 - \frac{\text{ア}}{\text{イ}}t\right)e^{-t/2}$ となる。ア、イを求めよ。

ア イ

(2) 先生「 y' の符号が変わる時刻を調べれば、明るさが最大になる瞬間が分かるね。」
明るさが最大になるのは $t = \text{ウ}$ （秒）のときであり、そのときの明るさの値は $y = \frac{\text{エ}}{e}$ である。ウ、エを求めよ。

ウ エ

(3) 花子「最大になったあとは、明るさがどんどん小さくなっていくはずですね。」
 $t = 4$ における明るさの値を求めると $y = \frac{\text{オ}}{e^{\text{カ}}}$ である。オ、カを求めよ。

オ カ

大問3 目標時間 11分／配点 20点

陶芸教室に通う太郎さんは、鉢の内側の形を、曲線 $y = \sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 4$) を y 軸のまわりに1回転させてできる形として設計している（底が細く、上に向かって広がる、鉢らしい形になる）。先生と一緒に、区分求積法の考え方から出発して、面積・

体積を順番に計算している。

先生「区分求積法の式が定積分に直せることを、まずは面積 S の計算で確認しておこう。」

- (1) 面積 $S = \int_0^4 \sqrt{x} dx$ を区分求積法の定義から確かめる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4k}{n}}$ は $\int_0^4 \sqrt{x} dx$ の値に等しい。実際に積分を計算すると $S = \frac{\text{アイ}}{\text{ウ}}$ である。アイ、ウを求めよ。

アイ ウ

- (2) 太郎「曲線 $y = \sqrt{x}$ は、 $x = y^2$ と書き直せますね。」先生「そうだね。まず $y = 2$ （鉢の縁の高さ）のときの半径 x を確認しよう。それから、(1)で求めた面積 S を使えば、曲線と y 軸ではさまれた部分の面積 T も求められるよ。」
 $y = 2$ のとき $x = \text{エ}$ である。また、幅4・高さ2の長方形の面積から S を引くと $T = \frac{\text{オ}}{\text{カ}}$ である。エ、オ、カを求めよ。

エ オ カ

- (3) 先生「鉢の内側の空洞は、 $x = y^2$ を y 軸のまわりに $0 \leq y \leq 2$ の範囲で回転させてできる立体だね。この体積を求めよう。」

体積は $V = \pi \int_0^2 x^2 dy$ と表せる。(2)で確認した $x = y^2$ を使ってこれを計算すると、 $V = \frac{\text{キク}}{\text{ケ}} \pi$ である。キク、ケを求めよ。

キク ケ