

数III まとめ

解答（全42問）

氏名 _____

得点 /42点

DRILL

まとめテスト（標準）

基本（1～20）

1

$|r| < 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ を求めよ。

極限值 0

$r = \frac{2}{5}$ は $-1 < r < 1$ を満たすので0に収束する。

0

2

分数式・最高次で割る

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-3}{2n+7}$ を求めよ。

極限值 2

分子・分母を n で割ると $\frac{4 - \frac{3}{n}}{2 + \frac{7}{n}} \rightarrow \frac{4-0}{2+0}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-3}{2n+7} = 2$$

3

無限等比級数の和

初項12、公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数の和を求めよ。

和 16

$$|r| = \frac{1}{4} < 1 \text{ なので収束する。 } S = \frac{12}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{12}{\frac{3}{4}}$$

16

4

約分

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ を求めよ。

極限值 -1

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = x-3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = 2 - 3 = -1$$

5

sinの基本公式

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$ を求めよ。

極限值 4

$$\frac{\sin 4x}{x} = 4 \cdot \frac{\sin 4x}{4x} \rightarrow 4 \times 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = 4$$

6

 $x \rightarrow \infty$ ・分子の次数が低い

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{x^2 - 1}$ を求めよ。

極限值 0

分母の次数（2次）が分子の次数（1次）より高いので、分母の最高次 x^2 で割ると分子は0に近づく。

$$\frac{2x + 3}{x^2 - 1} = \frac{\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} \rightarrow \frac{0}{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{x^2 - 1} = 0$$

7

連続になるように定数を定める

次の関数が $x = 3$ で連続となるように、定数 a の値を定めよ。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & (x \neq 3) \\ a & (x = 3) \end{cases}$$

$$a = \underline{6}$$

$$x \neq 3 \text{ のとき } f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3。$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6。$$

$$a = 6$$

8

積の微分・基本

$y = x^2(3x - 2)$ を微分したとき、 y' の x^2 の係数と x の係数を求めよ。

$$x^2 \text{ の係数 } \underline{9} \quad x \text{ の係数 } \underline{-4}$$

$$f(x) = x^2, f'(x) = 2x, g(x) = 3x - 2, g'(x) = 3 \text{ とおく。}$$

$$y' = 2x(3x - 2) + x^2 \cdot 3 = 6x^2 - 4x + 3x^2$$

$$y' = 9x^2 - 4x$$

$y = \frac{3x-2}{x+1}$ を微分し、 $y'(0)$ の値を求めよ。

$$y'(0) = \underline{\underline{5}}$$

$f(x) = 3x - 2$, $f'(x) = 3$, $g(x) = x + 1$, $g'(x) = 1$ とおく。

$$y' = \frac{3(x+1) - (3x-2) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{3x+3-3x+2}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$$

$x = 0$ を代入すると分母は1。

$$y'(0) = 5$$

$y = (2x+3)^4$ を微分すると $y' = A(2x+3)^3$ の形になる。 A の値と $y'(-1)$ の値を求めよ。

$$A = \underline{\underline{8}} \quad y'(-1) = \underline{\underline{8}}$$

$u = 2x + 3$ とおくと $y = u^4$ 。

$$\frac{dy}{du} = 4u^3, \quad \frac{du}{dx} = 2$$

$$y' = 4u^3 \cdot 2 = 8u^3 = 8(2x+3)^3$$

$x = -1$ を代入すると $u = 1$ なので $y'(-1) = 8 \times 1^3$ 。

$$A = 8, y'(-1) = 8$$

11

sin・cosの微分係数

$y = \sin x$ の $x = \frac{\pi}{3}$ における微分係数と、 $y = \cos x$ の $x = \frac{\pi}{6}$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

$$\sin : y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \underline{1/2} \quad \cos : y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \underline{-1/2}$$

$$y = \sin x \text{ なら } y' = \cos x \text{ なので } y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}。$$

$$y = \cos x \text{ なら } y' = -\sin x \text{ なので } y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}。$$

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

12

 $\ln x \cdot e^x$ の微分係数

$y = \ln x$ の $x = \frac{1}{4}$ における微分係数と、 $y = e^x$ の $x = 1$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

$$\ln x : y'\left(\frac{1}{4}\right) = \underline{4} \quad e^x : y'(1) = \underline{e}$$

$$y = \ln x \text{ なら } y' = \frac{1}{x} \text{ なので } y'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{1/4} = 4。$$

$$y = e^x \text{ なら } y' = e^x \text{ (微分しても形が変わらない) なので } y'(1) = e。$$

$$4, e$$

13

接線・べき関数

曲線 $y = x^3 - 3x + 1$ 上の $x = 2$ における接線の傾きと y 切片を求めよ。

$$\text{傾き } \underline{9} \quad y \text{ 切片 } \underline{-15}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \text{ より } f'(2) = 12 - 3 = 9。 \text{ 接点は } f(2) = 8 - 6 + 1 = 3。$$

$$\text{接線 : } y = 9(x - 2) + 3 = 9x - 18 + 3 = 9x - 15$$

$$\text{傾き } 9, y \text{ 切片 } -15$$

14

極値・3次関数

$y = x^3 - 6x^2 + 9x$ の極値を求めよ。

極大値 4 ($x =$ 1) 極小値 0 ($x =$ 3)

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$ 。 $f'(x) = 0$ より $x = 1, 3$ 。

$x < 1$ で増加、 $1 < x < 3$ で減少、 $x > 3$ で増加。

$f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$ 、 $f(3) = 27 - 54 + 27 = 0$ 。

$x = 1$ で極大値4、 $x = 3$ で極小値0

15

不定積分の基本公式（総合）

$\int \left(4x^3 - \frac{2}{x} + 5 \cos x \right) dx$ を求めよ (C は省略してよい)。 x^4 の係数、 $\ln|x|$ の係数、 $\sin x$ の係数をそれぞれ求めよ。

x^4 の係数 1 $\ln|x|$ の係数 -2 $\sin x$ の係数 5

各項を公式にあてはめる。

$$\int 4x^3 dx = x^4, \quad \int \left(-\frac{2}{x} \right) dx = -2 \ln|x|, \quad \int 5 \cos x dx = 5 \sin x$$

$$x^4 - 2 \ln|x| + 5 \sin x$$

16

置換積分（べき乗型・定積分）

$$\int_0^1 8x(x^2 + 1)^3 dx \text{ を求めよ。}$$

値 15

$u = x^2 + 1$ とおくと $du = 2x dx$ 、すなわち $8x dx = 4 du$ 。 $x : 0 \rightarrow 1$ のとき $u : 1 \rightarrow 2$ 。

$$\int_0^1 8x(x^2 + 1)^3 dx = \int_1^2 4u^3 du = \left[u^4 \right]_1^2 = 16 - 1 = 15$$

15

17

部分積分（ $x \cdot e^x$ 型・定積分）

$$\int_0^2 xe^x dx \text{ を求めよ。}$$

値 $e^2 + 1$

$f(x) = x$, $g'(x) = e^x$ と選ぶと $\int xe^x dx = (x - 1)e^x + C$ なので

$$\int_0^2 xe^x dx = \left[(x - 1)e^x \right]_0^2 = 1 \cdot e^2 - (-1 \cdot 1) = e^2 + 1$$

 $e^2 + 1$

18

奇関数の性質

$$\int_{-2}^2 (7x^3 - 4x) dx \text{ を求めよ。}$$

値 0

$f(x) = 7x^3 - 4x$ は $f(-x) = -7x^3 + 4x = -f(x)$ より奇関数。区間が原点对称なので、計算するまでもなく積分は0。

0

19

曲線とx軸の間の面積

曲線 $y = 3x^2$ と x 軸、直線 $x = 2$ で囲まれた部分の面積 S ($0 \leq x \leq 2$) を求めよ。

$$S = \underline{\underline{8}}$$

$3x^2 \geq 0$ なので、そのまま積分すればよい。

$$S = \int_0^2 3x^2 dx = \left[x^3 \right]_0^2 = 8$$

$$S = 8$$

20

回転体の体積（円錐型の確認）

直線 $y = x$ と x 軸、直線 $x = 4$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は $V = \frac{\text{ア}}{3}\pi$ と表せる。アを求めよ。

$$\text{ア} = \underline{\underline{64}}$$

$$V = \pi \int_0^4 x^2 dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{64}{3}\pi$$

$$\text{ア} = 64$$

21

根号の有理化 (数列)

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - n)$ を求めよ。

極限值 $\frac{3}{2}$

分子・分母に $\sqrt{n^2 + 3n} + n$ を掛けて有理化する。

$$\sqrt{n^2 + 3n} - n = \frac{(n^2 + 3n) - n^2}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} = \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n}$$

分子・分母を n で割ると

$$= \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} \rightarrow \frac{3}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - n) = \frac{3}{2}$$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + ax + b}{x - 3} = 7$ が成り立つように定数 a, b の値を定めよ。

$$a = \underline{-5} \quad b = \underline{-3}$$

分母が $x \rightarrow 3$ で0に近づき、極限値が7（有限）と指定されているので、分子も $x = 3$ で0でなければならない。

$$\text{分子に } x = 3 \text{ を代入 : } 18 + 3a + b = 0 \quad \cdots(1)$$

分子が $x - 3$ を因数に持つので $2x^2 + ax + b = (x - 3)(2x + c)$ と書ける（ c は定数）。展開すると $2x^2 + (c - 6)x - 3c$ 。

$$\text{係数比較 : } a = c - 6, b = -3c。$$

商 $2x + c$ に $x = 3$ を代入した値が極限値になるので、 $6 + c = 7$ より $c = 1$ 。

このとき $a = c - 6 = -5$ 、 $b = -3c = -3$ 。((1)式で確認： $18 + 3(-5) + (-3) = 0$ で成立)

$$a = -5, b = -3 \text{ (実際 } 2x^2 - 5x - 3 = (x - 3)(2x + 1) \text{ となり、極限値は } 2 \times 3 + 1 = 7)$$

$y = (x - 1)^3(x + 2)^2$ を対数微分法で微分し、 $y'(3)$ の値を求めよ。

$$y'(3) = \underline{\underline{380}}$$

$x = 3$ 付近では $x - 1 > 0$, $x + 2 > 0$ なので、そのまま両辺の対数をとってよい。

$$\ln y = 3 \ln(x - 1) + 2 \ln(x + 2)$$

両辺を x で微分する。

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x - 1} + \frac{2}{x + 2}$$

まず $x = 3$ での y の値を求める。

$$y(3) = (3 - 1)^3(3 + 2)^2 = 8 \times 25 = 200$$

次に $x = 3$ での $\frac{y'}{y}$ の値を求める。

$$\left. \frac{y'}{y} \right|_{x=3} = \frac{3}{2} + \frac{2}{5} = \frac{15}{10} + \frac{4}{10} = \frac{19}{10}$$

$$y' = y \times \frac{y'}{y} \text{ より}$$

$$y'(3) = 200 \times \frac{19}{10} = 380$$

$$y'(3) = 380$$

$x^2 - xy + y^2 = 7$ について、点 $(3, 1)$ における $\frac{dy}{dx}$ の値を求めよ。

$y' = \underline{5}$

両辺を x で微分する。 x^2 の微分は $2x$ 。 xy の微分は積の微分公式で $y + xy'$ 。 y^2 の微分は合成関数の微分法で $2y \cdot y'$ 。右辺7の微分は0。

$$2x - (y + xy') + 2y \cdot y' = 0$$

y' を含む項をくくり出す。

$$2x - y + y'(2y - x) = 0$$

$$y' = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

点 $(3, 1)$ を代入すると、分子は $1 - 6 = -5$ 、分母は $2 - 3 = -1$ 。

$y' = 5$

$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$ を求めよ。

値 $\underline{\pi/4}$

半角公式 $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ を使う。

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi/2} = \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$\frac{\pi}{4}$

$$\int \frac{1}{x^2 - 16} dx = \frac{1}{A} \ln \left| \frac{x-4}{x+4} \right| + C \quad \text{の} A \text{を求めよ。}$$

$$A = \underline{8}$$

$$\frac{1}{x^2 - 16} = \frac{1}{(x-4)(x+4)} = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+4} \right) \text{と分解できるので}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 16} dx = \frac{1}{8} \ln |x-4| - \frac{1}{8} \ln |x+4| + C = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x-4}{x+4} \right| + C$$

$$A = 8$$

$$f(x) = x^2 - 3x \text{ について、} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \text{ を求めよ。}$$

$$\text{極限值 } \underline{1}$$

$$f(2+h) = (2+h)^2 - 3(2+h) = 4 + 4h + h^2 - 6 - 3h = h^2 + h - 2、$$

$$f(2) = 4 - 6 = -2 \text{なので}$$

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(h^2 + h - 2) - (-2)}{h} = \frac{h^2 + h}{h} = h + 1 \quad (h \neq 0 \text{なら約分できる})$$

$$h \rightarrow 0 \text{を代入すると}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 1 \quad (\text{この極限はそのまま} f'(2) \text{であり、実際} f'(x) = 2x - 3 \text{より} f'(2) = 1 \text{と一致する})$$

曲線 $y = x^2$ の $x = 1$ における接線の方程式を求めよ。また、この曲線と接線ではさまれた部分のうち $0 \leq x \leq 2$ の部分の面積 S を求めよ。

接線：傾き 2 y 切片 -1 $S = \underline{\underline{2/3}}$

$f'(x) = 2x$ より $f'(1) = 2$ 。接点は $(1, 1)$ なので接線は
 $y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$ （傾き2、 y 切片-1）

$x^2 - (2x - 1) = (x - 1)^2 \geq 0$ なので、曲線はつねに接線以上（等号は $x = 1$ のときだけ）。よって $0 \leq x \leq 2$ では曲線が上、接線が下。

$$S = \int_0^2 \{x^2 - (2x - 1)\} dx = \int_0^2 (x - 1)^2 dx = \left[\frac{(x - 1)^3}{3} \right]_0^2 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

接線は $y = 2x - 1$ （傾き2、 y 切片-1）、面積 $S = \frac{2}{3}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{5k^4}{n^5}$ を求めよ。

値 1

和の形を「 $\frac{1}{n} \times (k/n \text{ だけの式})$ 」に整理する。

$$\sum_{k=1}^n \frac{5k^4}{n^5} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 5 \left(\frac{k}{n} \right)^4$$

これは $f(x) = 5x^4$ として $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ の形になっているので、極限は

$$\int_0^1 5x^4 dx = \left[x^5 \right]_0^1 = 1 \text{ に一致する。}$$

1

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 2x}$ を求めよ。

極限值 $\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \tan 3x &= \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \text{なので} \\ \frac{\tan 3x}{\sin 2x} &= \frac{\sin 3x}{\cos 3x \cdot \sin 2x} = \frac{1}{\cos 3x} \cdot \frac{\sin 3x}{x} \cdot \frac{x}{\sin 2x} \\ &= \frac{1}{\cos 3x} \cdot 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \end{aligned}$$

$x \rightarrow 0$ のとき $\cos 3x \rightarrow 1$ 、 $\frac{\sin 3x}{3x} \rightarrow 1$ 、 $\frac{\sin 2x}{2x} \rightarrow 1$ (したがって $\frac{2x}{\sin 2x} \rightarrow 1$)
なので

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 2x} = \frac{1}{1} \times 3 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$$

直線上を運動する点の加速度が $a(t) = 6t - 4$ ($t \geq 0$) で表され、速度は $v(0) = 1$ 、位置は $x(0) = 0$ を満たすとする。速度 $v(t)$ を求めるときに定まる定数 ($v(0) = 1$ から決まる積分定数) の値と、位置の式 $x(t)$ を使った $x(2)$ の値を求めよ。

積分定数 1 $x(2) =$ 2

速度は加速度の不定積分（微分の逆演算）。

$$\begin{aligned} v(t) &= \int a(t) dt = \int (6t - 4) dt = 3t^2 - 4t + C \\ v(0) &= 1 \text{ より } C = 1. \text{ よって } v(t) = 3t^2 - 4t + 1. \end{aligned}$$

位置は速度の不定積分。

$$\begin{aligned} x(t) &= \int v(t) dt = \int (3t^2 - 4t + 1) dt = t^3 - 2t^2 + t + C_2 \\ x(0) &= 0 \text{ より } C_2 = 0. \text{ よって } x(t) = t^3 - 2t^2 + t. \\ x(2) &= 8 - 8 + 2 = 2 \end{aligned}$$

積分定数は1 ($v(t) = 3t^2 - 4t + 1$)、 $x(2) = 2$

曲線 $y = x^2$ ($x \geq 0$) と y 軸、直線 $y = 4$ で囲まれた部分を、 y 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は $V = \text{ア} \pi$ と表せる。アを求めよ。

ア = 8

$y = x^2$ ($x \geq 0$) を x について解くと $x^2 = y$ 。

$$V = \pi \int_0^4 x^2 dy = \pi \int_0^4 y dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi$$

$\text{ア} = 8$

$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n-1}{3n+2}$ とする。 $g(x) = ax^2 - 4x$ の最小値を求めよ。また $\int_0^a 2x dx$ の値を求めよ。

$a = \underline{2}$ $g(x)$ の最小値 $\underline{-2}$ ($x = \underline{1}$) $\int_0^a 2x dx = \underline{4}$

まず a を求める。分子・分母を n で割ると

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{6}{3} = 2$$

$a = 2$ なので $g(x) = 2x^2 - 4x$ 。 $g'(x) = 4x - 4$ 、 $g'(x) = 0$ より $x = 1$ 。

$g''(x) = 4 > 0$ （下に凸）なので $x = 1$ で最小。

$$g(1) = 2 - 4 = -2$$

最後に $\int_0^a 2x dx = \int_0^2 2x dx = \left[x^2 \right]_0^2 = 4$

$a = 2$ 、 $x = 1$ で最小値 -2 、 $\int_0^2 2x dx = 4$

$x > 0$ のとき $e^x > 1 + x$ が成り立つことを証明せよ。

$g(x) = e^x - 1 - x$ ($x \geq 0$) とおく。 $x > 0$ で $g(x) > 0$ を示せばよい。

$$g'(x) = e^x - 1$$

$x > 0$ のとき $e^x > 1$ (e^x は単調増加で $e^0 = 1$ だから) なので $g'(x) > 0$ 。よって $g(x)$ は $x > 0$ の範囲で単調に増加する。

$$g(0) = e^0 - 1 - 0 = 1 - 1 - 0 = 0$$

$g(x)$ は $x = 0$ から単調に増加するので、 $x > 0$ のとき $g(x) > g(0) = 0$ 。

$x > 0$ のとき $e^x > 1 + x$ (証明終わり)

35

総合：微分×積分（極値とグラフの概形→面積）

$f(x) = x^3 - 3x^2$ の極値を求めよ。また、この曲線と x 軸で囲まれた部分のうち $0 \leq x \leq 3$ の部分の面積 S を求めよ。

極大値 0 ($x =$ 0 $)$ 極小値 -4 ($x =$ 2 $)$ $S =$ $\frac{27}{4}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ 。 $f'(x) = 0$ より $x = 0, 2$ 。

$x < 0$ で増加、 $0 < x < 2$ で減少、 $x > 2$ で増加。

$f(0) = 0$ (極大)、 $f(2) = 8 - 12 = -4$ (極小)。

面積は $f(x) = x^2(x - 3)$ と因数分解できることを使う。 $0 \leq x \leq 3$ では $x^2 \geq 0$ 、
 $x - 3 \leq 0$ なので $f(x) \leq 0$ (等号は $x = 0, 3$ のみ)。 曲線は x 軸より下にあるので

$$S = - \int_0^3 (x^3 - 3x^2) dx = - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 \right]_0^3 = - \left(\frac{81}{4} - 27 \right) = - \left(-\frac{27}{4} \right) = \frac{27}{4}$$

$x = 0$ で極大値0、 $x = 2$ で極小値-4。 面積 $S = \frac{27}{4}$

$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$ をeを用いて表せ。また、 $\int_0^{\ln L} e^x dx$ の値を求めよ。

$$L = \underline{e^3} \quad \int_0^{\ln L} e^x dx = \underline{e^3 - 1}$$

eの定義の一般形 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$ に $k = 3$ を当てはめると

$$L = e^3$$

$\ln L = \ln e^3 = 3$ なので

$$\int_0^{\ln L} e^x dx = \int_0^3 e^x dx = \left[e^x\right]_0^3 = e^3 - 1$$

$$L = e^3, \int_0^3 e^x dx = e^3 - 1$$

直線上を運動する点の位置が $x(t) = -t^3 + 6t^2$ ($0 \leq t \leq 6$) で表されるとき、 x が最大になる時刻とそのときの位置を求めよ。また、 $0 \leq t \leq 6$ における道のり（速度の符号が変わることに注意した移動距離の総和）を求めよ。

x が最大： $t = \underline{4}$ 位置 $\underline{32}$ 道のり $\underline{64}$

速度は $v(t) = x'(t) = -3t^2 + 12t = -3t(t - 4)$ 。 $v(t) = 0$ より $t = 0, 4$ 。

$0 < t < 4$ で $v(t) > 0$ （前進）、 $4 < t < 6$ で $v(t) < 0$ （後退）なので、 $t = 4$ で x は最大になる。

$$x(4) = -64 + 6 \times 16 = 32$$

道のりを求める。 $x(0) = 0$ 、 $x(4) = 32$ 、 $x(6) = -216 + 6 \times 36 = 0$ 。

$0 \rightarrow 4$ 秒で x は 0 から 32 まで前進し、 $4 \rightarrow 6$ 秒で 32 から 0 まで後退する。道のりは移動距離の絶対値の和なので

$$\text{道のり} = |32 - 0| + |0 - 32| = 32 + 32 = 64$$

$t = 4$ で x が最大（位置 32）、 $0 \leq t \leq 6$ の道のりは 64

$f(x) = \sqrt{x+1}$ について、極限の定義 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ を有理化によって計算し、 $f'(3)$ を求めよ。また、この結果を使って曲線 $y = f(x)$ の $x = 3$ における接線の傾きと y 切片を求めよ。

$$f'(3) = \underline{1/4} \quad \text{接線：傾き } \underline{1/4} \quad y \text{ 切片 } \underline{5/4}$$

$$f(3) = \sqrt{4} = 2 \text{ なので}$$

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h}$$

分子・分母に $\sqrt{4+h} + 2$ を掛けて有理化する。

$$= \frac{(4+h) - 4}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \frac{h}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2}$$

$$h \rightarrow 0 \text{ を代入すると } \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}。 \text{ よって } f'(3) = \frac{1}{4}。$$

接線は傾き $\frac{1}{4}$ 、接点 $(3, 2)$ を通るので

$$y = \frac{1}{4}(x-3) + 2 = \frac{x}{4} - \frac{3}{4} + 2 = \frac{x}{4} + \frac{5}{4}$$

$$f'(3) = \frac{1}{4}。 \text{ 接線の傾き } \frac{1}{4}、y \text{ 切片 } \frac{5}{4}$$

$x > 0$ のとき $\ln(1+x) < x$ が成り立つことを証明せよ。また、この不等式を利用すると $\int_0^1 \ln(1+x) dx$ は $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ より小さいと分かる。実際に

$\int_0^1 \ln(1+x) dx$ の値を部分積分によって求めよ。

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx = \underline{2\ln 2 - 1}$$

まず不等式を証明する。 $g(x) = x - \ln(1+x)$ ($x > -1$) とおく。

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

$x > 0$ のとき分子・分母がともに正なので $g'(x) > 0$ 、 $g(x)$ は $x > 0$ で単調に増加する。 $g(0) = 0 - \ln 1 = 0$ なので、 $x > 0$ のとき $g(x) > g(0) = 0$ 、すなわち $x > \ln(1+x)$ 。

次に $\int_0^1 \ln(1+x) dx$ を求める。 $f(x) = \ln(1+x)$ 、 $g'(x) = 1$ と選んで部分積分する ($f'(x) = \frac{1}{1+x}$ 、 $g(x) = x$)。

$$\begin{aligned} \int \ln(1+x) dx &= x \ln(1+x) - \int \frac{x}{1+x} dx \\ \frac{x}{1+x} &= 1 - \frac{1}{1+x} \text{ と変形できるので } \int \frac{x}{1+x} dx = x - \ln(1+x) + C. \\ \int \ln(1+x) dx &= x \ln(1+x) - \{x - \ln(1+x)\} + C = (x+1) \ln(1+x) - x + C \end{aligned}$$

端点を代入する。

$$x=1: 2\ln 2 - 1 \quad x=0: 1 \times \ln 1 - 0 = 0$$

不等式は証明のとおり成り立ち、 $\int_0^1 \ln(1+x) dx = 2\ln 2 - 1$ (≈ 0.386 で、たしかに $\frac{1}{2}$ より小さい)

$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x}{x^2 + 2}$ とする。 $f(x) = x^3 - 3ax^2$ の極値を求めよ。さらに、この曲線と x 軸で囲まれた部分のうち $0 \leq x \leq 6$ の部分の面積 S を求めよ。

$a = \underline{3}$ 極大値 $\underline{0}$ ($x = \underline{0}$) 極小値 $\underline{-108}$ ($x = \underline{6}$) $S = \underline{324}$

まず a を求める。分子・分母を x^2 で割ると

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{x}}{1 + \frac{2}{x^2}} = \frac{3}{1} = 3$$

$a = 3$ なので $f(x) = x^3 - 9x^2$ 。

$f'(x) = 3x^2 - 18x = 3x(x - 6)$ 。 $f'(x) = 0$ より $x = 0, 6$ 。

$x < 0$ で増加、 $0 < x < 6$ で減少、 $x > 6$ で増加。

$f(0) = 0$ (極大)、 $f(6) = 216 - 9 \times 36 = 216 - 324 = -108$ (極小)。

面積を求める。 $f(x) = x^2(x - 9)$ と因数分解できるので、 $0 \leq x \leq 9$ では $x^2 \geq 0$ 、 $x - 9 \leq 0$ より $f(x) \leq 0$ 。 $0 \leq x \leq 6$ はこの範囲に含まれるので、この区間でも $f(x) \leq 0$ (等号は $x = 0$ のみ)。

$$S = - \int_0^6 (x^3 - 9x^2) dx = - \left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 \right]_0^6 = - \left(\frac{1296}{4} - 648 \right) = -(324 - 648) = 324$$

$a = 3$ 。 $x = 0$ で極大値 0 、 $x = 6$ で極小値 -108 。面積 $S = 324$

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1

微分係数の定義 $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ と、区分求積法の定義

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

は、どちらも「極限」という同じ考え方から

生まれている。 $f(x) = x^2$ を例にとり、実際に $f'(1)$ と $\int_0^1 x^2 dx$ の両方をこの定義どおりに計算することで、極限が微分と積分の両方の土台になっていることを説明せよ。

まず $f'(1)$ を定義どおりに計算する。 $f(x) = x^2$ なので

$$f(1+h) - f(1) = (1+h)^2 - 1^2 = 1 + 2h + h^2 - 1 = 2h + h^2$$

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h \quad (h \neq 0 \text{ なら約分できる})$$

$h \rightarrow 0$ とすると $2 + h \rightarrow 2$ なので $f'(1) = 2$ 。これは公式 $(x^2)' = 2x$ から求めた $f'(1) = 2 \times 1 = 2$ と一致する。

次に $\int_0^1 x^2 dx$ を、公式を使わずに区分求積法の定義どおりに計算する。

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$$

数列の和の公式 $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ を代入すると

$$\frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{6}$$

$n \rightarrow \infty$ とすると $\frac{3}{n} \rightarrow 0$ 、 $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ なので、この式は $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ に近づく。これは公式

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \text{ から求めた } \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \text{ と一致する。}$$

このように、 $f'(1)$ の計算は「 $h \rightarrow 0$ 」という極限、 $\int_0^1 x^2 dx$ の計算は「 $n \rightarrow \infty$ 」

という極限を実際に取りすることで初めて値が確定する。ふだん使っている微分公式・積分公式は、この極限計算をあらかじめ済ませて一般化したものにすぎない。

$$f'(1) = 2, \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

どちらも、定義に戻ればそれぞれ $h \rightarrow 0$ 、 $n \rightarrow \infty$ という極限計算そのものであり、微分と積分は極限という共通の土台の上に成り立っている。

記2 関数 $f(x) = xe^{-x}$ ($x \geq 0$) について、(1) $f'(x)$ を求め、 $f(x)$ の最大値を求めよ。(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸、直線 $x = 2$ で囲まれた部分の面積を、部分積分を用いて求めよ。(3) (1) の計算と (2) の計算は、それぞれどのような極限の考え方を土台にしているかを説明せよ。

(1) 積の微分公式を使う。 $f(x) = x \cdot e^{-x}$ なので

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x)$$

$f'(x) = 0$ となるのは $1 - x = 0$ 、すなわち $x = 1$ のとき (e^{-x} はつねに正なので 0 にならない)。

$0 \leq x < 1$ では $1 - x > 0$ なので $f'(x) > 0$ (増加)、 $x > 1$ では $1 - x < 0$ なので $f'(x) < 0$ (減少)。よって $x = 1$ で最大値をとる。

$$f(1) = 1 \times e^{-1} = \frac{1}{e}$$

(2) $f(x) = xe^{-x} \geq 0$ ($x \geq 0$) なので、そのまま積分すればよい。 $g(x) = x$, $h'(x) = e^{-x}$ と選んで部分積分する ($h(x) = -e^{-x}$)。

$$\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} - \int (-e^{-x}) dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1)e^{-x} + C$$

端点を代入する。

$$x = 2 : -3e^{-2} = -\frac{3}{e^2} \quad x = 0 : -1 \times 1 = -1$$

$$S = \int_0^2 xe^{-x} dx = \left(-\frac{3}{e^2}\right) - (-1) = 1 - \frac{3}{e^2}$$

(3) (1) の $f'(x)$ は微分係数の定義 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ にもとづいており、「 h を限りなく 0 に近づける」という極限が土台になっている。実際に積の微分公式を使うところで、この極限操作をあらかじめ計算しておいた結果を利用していることになる。

(2) の面積は定積分 $\int_0^2 f(x) dx$ であり、これは区分求積法 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k}{n}\right)$ の考

え方、すなわち「区間を限りなく細かい短冊に割り、それをたし合わせてから、分割数を限りなく大きくする」という極限が土台になっている。部分積分は、この積分計算を効率よく実行するための技術にすぎない。

(1) $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ 、 $x = 1$ で最大値 $\frac{1}{e}$ 。(2) $S = 1 - \frac{3}{e^2}$ 。(3) (1) は $h \rightarrow 0$ の極限 (微分係数の定義)、(2) は $n \rightarrow \infty$ の極限 (区分求積法) がそれぞれ土台になっている。

EXAM

共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 12分／配点 20点

太郎さんと花子さんは、ボールを落としたときの跳ね返り方について、極限の考え方を使って調べている。高さ4mからボールを静かに落とすと、床に当たるたびに跳ね返る高さは直前の高さのちょうど $\frac{1}{2}$ 倍になるという。 n 回目に跳ね返った後に達する最高点の高さを a_n (m) とする。

花子「1回目の跳ね返りの高さ a_1 は、最初の高さ4mの半分になるね。」

太郎「その調子で、 a_n を n の式で表してみよう。」

(1)

$a_n = 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n$ と表せる。これを用いると $a_1 = \boxed{\text{ア}}$ (m) であり、

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \boxed{\text{イ}}$ である。ア、イを求めよ。

ア 2 イ 0

$$a_1 = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$a_n = 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n$ について、公比 $r = \frac{1}{2}$ は $-1 < r < 1$ を満たすので $\left(\frac{1}{2} \right)^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4 \times 0 = 0$$

$$a_1 = 2, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

(2)

花子「ボールが上下に動いた距離の合計は、最初の落下4mと、跳ね返るたびの『上がって下がる』分をすべて足したものになるね。」

ボールが無限に跳ね返り続けるとして、動いた距離の総和を求めると ウエ
(m) である。ウエを求めよ。

ウエ 12

跳ね返るたびに、高さ a_k だけ上がってから同じ a_k だけ下がるので、 k 回目の跳ね返りで動く距離は $2a_k$ 。最初の落下4mと合わせると、総距離は

$$4 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は初項 $a_1 = 2$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数なので

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4$$

$$\text{総距離} = 4 + 2 \times 4 = 12$$

総距離は12m

(3) 太郎「跳ね返りの高さが0.1m未満になるのは何回目からか、実際に数値を代入して確かめてみよう。」 $a_n < 0.1$ を満たす最小の n を求めると $n =$ オ である。オを求めよ。

オ 6

$a_n = 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n$ に順に代入して確かめる。

$$a_4 = 4 \times \frac{1}{16} = 0.25 \text{ (0.1以上)}$$

$$a_5 = 4 \times \frac{1}{32} = 0.125 \text{ (0.1以上)}$$

$$a_6 = 4 \times \frac{1}{64} = 0.0625 \text{ (0.1未満)}$$

$n = 6$ (6回目の跳ね返りから0.1m未満になる)

科学部の花子さんは、打ち上げ花火が開いてからの明るさの変化を、時刻 t （秒後、 $t \geq 0$ ）の関数 $y = te^{-t/2}$ で近似できると考え、先生と一緒に微分を使って調べている。

先生「まずは y を t で微分してみよう。積の微分公式が使えるね。」

(1) y' を求めると $y' = \left(1 - \frac{\text{ア}}{\text{イ}}t\right)e^{-t/2}$ となる。ア、イを求めよ。

ア 1 イ 2

$y = t \cdot e^{-t/2}$ に積の微分公式を使う。 $u = -\frac{t}{2}$ とおくと $(e^{-t/2})' = e^{-t/2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$ （合成関数の微分法）なので

$$y' = 1 \cdot e^{-t/2} + t \cdot e^{-t/2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-t/2} \left(1 - \frac{t}{2}\right)$$

$$y' = \left(1 - \frac{1}{2}t\right)e^{-t/2} \quad (\text{ア}=1, \text{イ}=2)$$

(2) 先生「 y'

の符号が変わる時刻を調べれば、明るさが最大になる瞬間が分かるね。」

明るさが最大になるのは $t = \boxed{\text{ウ}}$ （秒）のときであり、そのときの明るさの値

は $y = \frac{\boxed{\text{エ}}}{e}$ である。ウ、エを求めよ。

ウ 2 エ 2

(1)の $y' = \left(1 - \frac{t}{2}\right)e^{-t/2}$ について、 $e^{-t/2}$ はつねに正なので、符号は $1 - \frac{t}{2}$ だけで決まる。

$1 - \frac{t}{2} = 0$ より $t = 2$ 。 $t < 2$ で $y' > 0$ （増加）、 $t > 2$ で $y' < 0$ （減少）なので、 $t = 2$ で最大。

$$y(2) = 2 \times e^{-1} = \frac{2}{e}$$

$$t = 2 \text{ のとき最大値 } y = \frac{2}{e} \quad (\text{ウ} = 2, \text{エ} = 2)$$

(3) 花子「最大になったあとは、明るさがどんどん小さくなっていくはずですね。」

$t = 4$ における明るさの値を求めると $y = \frac{\boxed{\text{オ}}}{e^{\boxed{\text{カ}}}}$ である。オ、カを求めよ。

オ 4 カ 2

$$y(4) = 4 \times e^{-4/2} = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2}$$

$t = 2$ での最大値 $\frac{2}{e}$ と比べると、 $t = 4$ ではさらに小さな値になっており、(2)で確認した「 $t > 2$ で減少」という増減表の結論と一致する。

$$y(4) = \frac{4}{e^2} \quad (\text{オ} = 4, \text{カ} = 2)$$

大問3 目標時間 11分/配点 20点

陶芸教室に通う太郎さんは、鉢の内側の形を、曲線 $y = \sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 4$) を y 軸のまわりに1回転させてできる形として設計している（底が細く、上に向かって広がる、鉢らしい形になる）。先生と一緒に、区分求積法の考え方から出発して、面積・体積を順番に計算している。

先生「区分求積法の式が定積分に直せることを、まずは面積 S の計算で確認しておこう。」

(1) 面積 $S = \int_0^4 \sqrt{x} dx$ を区分求積法の定義から確かめる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4k}{n}}$ は

$\int_0^4 \sqrt{x} dx$ の値に等しい。実際に積分を計算すると $S = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。ア

イ、ウを求めよ。

アイ 16 ウ 3

$\frac{4}{n}\sqrt{\frac{4k}{n}}$ は $f(x) = \sqrt{x}$ として $\frac{4}{n}f\left(\frac{4k}{n}\right)$ の形になっているので、区分解法により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4k}{n}} = \int_0^4 \sqrt{x} dx$$

実際に積分を計算する。

$$S = \int_0^4 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^4 = \frac{2}{3} \times 8 - 0 = \frac{16}{3}$$

$$S = \frac{16}{3} \text{ (アイ} = 16、\text{ウ} = 3)$$

- (2) 太郎「曲線 $y = \sqrt{x}$ は、 $x = y^2$ と書き直せますね。」先生「そうだね。まず $y = 2$ （鉢の縁の高さ）のときの半径 x を確認しよう。それから、(1)で求めた面積 S を使えば、曲線と y 軸ではさまれた部分の面積 T も求められるよ。」

$y = 2$ のとき $x = \boxed{\text{エ}}$ である。また、幅4・高さ2の長方形の面積から S を引くと $T = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。エ、オ、カを求めよ。

エ 4 オ 8 カ 3

$y = \sqrt{x}$ の両辺を2乗すると $x = y^2$ 。 $y = 2$ を代入すると $x = 2^2 = 4$ 。

長方形（幅4・高さ2）の面積は $4 \times 2 = 8$ 。この長方形は「曲線の下側（ x 軸との間）の面積 S 」と「曲線の左側（ y 軸との間）の面積 T 」に分けられるので

$$T = 8 - S = 8 - \frac{16}{3} = \frac{24}{3} - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$$

（検算： T は $x = y^2$ を $y = 0$ から2まで積分した値にも一致する。 $\int_0^2 y^2 dy =$

$$\left[\frac{y^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$x = 4 \text{ (エ} = 4)、T = \frac{8}{3} \text{ (オ} = 8、\text{カ} = 3)$$

- (3) 先生「鉢の内側の空洞は、 $x = y^2$ を y 軸のまわりに $0 \leq y \leq 2$ の範囲で回転させてできる立体だね。この体積を求めよう。」

体積は $V = \pi \int_0^2 x^2 dy$ と表せる。(2)で確認した $x = y^2$ を使ってこれを計算すると、 $V = \frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \pi$ である。キク、ケを求めよ。

キク 32 ケ 5

$x = y^2$ なので $x^2 = y^4$ 。これを $V = \pi \int_0^2 x^2 dy$ に代入する。

$$V = \pi \int_0^2 y^4 dy = \pi \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^2 = \pi \times \frac{32}{5} = \frac{32}{5} \pi$$

$$V = \frac{32}{5} \pi \quad (\text{キク} = 32, \text{ケ} = 5)$$