

軌跡と領域

解答（全20問）

氏名 _____

得点 _____ / 20点

DRILL

練習問題（全15問）

基本（1～6）

1

円の定義そのもの

点 $A(2, 0)$ から距離が 3 である点Pの軌跡を求めよ。中心の座標と半径を答えよ。

中心 (2 , 0) 半径 3

「定点からの距離が一定」は円の定義そのもの。中心は $A(2, 0)$ 、半径は 3 。

中心 $(2, 0)$ 、半径 3 の円

2

垂直二等分線（軸に平行）

2定点 $A(-3, 0)$ 、 $B(5, 0)$ から等距離にある点Pの軌跡は、直線 $x =$ いくつか。

$$x = \underline{1}$$

$$P(x, y) \text{ とおき } PA^2 = PB^2 : (x + 3)^2 + y^2 = (x - 5)^2 + y^2$$

$$\text{展開して } x^2 + 6x + 9 = x^2 - 10x + 25 \rightarrow 16x = 16 \rightarrow x = 1。$$

(A, B がともに x 軸上にあるので、答えは2点の midpoint の x 座標 $\frac{-3 + 5}{2} = 1$ と一致する。)

軌跡は直線 $x = 1$

3

垂直二等分線（軸に平行）

2定点 $A(0, -2)$ 、 $B(0, 4)$ から等距離にある点Pの軌跡は、直線 $y =$ いくつか。

$$y = \underline{1}$$

$$P(x, y) \text{ とおき } PA^2 = PB^2 : x^2 + (y + 2)^2 = x^2 + (y - 4)^2$$

$$\text{展開して } y^2 + 4y + 4 = y^2 - 8y + 16 \rightarrow 12y = 12 \rightarrow y = 1。$$

軌跡は直線 $y = 1$

4

直線の上下判定

不等式 $y > 2x - 1$ の表す領域に、点 $P(0, 3)$ は含まれるか。含まれるなら「○」、含まれないなら「×」を入力せよ。

○

$x = 0$ を直線の式に代入すると $2 \times 0 - 1 = -1$ 。点Pの y 座標は 3 で、 $3 > -1$ は成り立つ。

○ (含まれる)

5

円の内部判定・境界に注意

不等式 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 < 9$ の表す領域に、点 $Q(4, 2)$ は含まれるか。含まれるなら「○」、含まれないなら「×」を入力せよ。

×

$(4 - 1)^2 + (2 - 2)^2 = 9 + 0 = 9$ 。不等式は < 9 (等号なし) なので、ちょうど 9 になる点は境界線上にあり、領域には含まれない。

× (含まれない・円周上の点だから)

2定点 $A(0, 0)$ 、 $B(9, 0)$ に対し、 $PA : PB = 1 : 2$ を満たす点Pの軌跡を求めよ。中心の座標と半径を答えよ。

中心 (-3 , 0) 半径 6

$P(x, y)$ とおく。 $PA : PB = 1 : 2$ より $PB = 2PA$ 、両辺2乗して $PB^2 = 4PA^2$ 。

$$(x - 9)^2 + y^2 = 4(x^2 + y^2)$$

展開して整理： $x^2 - 18x + 81 + y^2 = 4x^2 + 4y^2 \rightarrow -3x^2 - 18x + 81 - 3y^2 = 0$

-3 で割って $x^2 + 6x - 27 + y^2 = 0$ 、平方完成して $(x + 3)^2 - 9 - 27 + y^2 = 0$
 $\rightarrow (x + 3)^2 + y^2 = 36$

中心 $(-3, 0)$ 、半径 6 の円

標準 (7~12)

連立不等式 $y \leq -x + 5$ 、 $y \geq x - 1$ 、 $x \geq 0$ の表す領域に、点 $(2, 2)$ は含まれるか。含まれるなら「○」、含まれないなら「×」を入力せよ。

○

$y \leq -x + 5 : 2 \leq -2 + 5 = 3 \rightarrow$ 成り立つ。

$y \geq x - 1 : 2 \geq 2 - 1 = 1 \rightarrow$ 成り立つ。

$x \geq 0 : 2 \geq 0 \rightarrow$ 成り立つ。すべて成り立つ。

○ (3つの不等式すべてを満たす)

不等式 $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 > 25$ の表す領域（円の外部）に、点 $R(9, 2)$ は含まれるか。含まれるなら「○」、含まれないなら「×」を入力せよ。

○

$(9 - 3)^2 + (2 - (-1))^2 = 6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45$ 。 $45 > 25$ なので不等式を満たす。

○（円の外部に含まれる）

2定点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ に対し、 $PA^2 + PB^2 = 26$ を満たす点Pの軌跡を求めよ。中心の座標と半径を答えよ。

中心 (1 , 0) 半径 3

$P(x, y)$ とおく。 $PA^2 = (x + 1)^2 + y^2$ 、 $PB^2 = (x - 3)^2 + y^2$ 。

$$(x + 1)^2 + y^2 + (x - 3)^2 + y^2 = 26$$

$$\text{展開： } x^2 + 2x + 1 + x^2 - 6x + 9 + 2y^2 = 26 \rightarrow 2x^2 - 4x + 10 + 2y^2 = 26$$

$$\text{両辺を2で割って } x^2 - 2x + 5 + y^2 = 13 \rightarrow x^2 - 2x + y^2 = 8$$

$$\text{平方完成： } (x - 1)^2 - 1 + y^2 = 8 \rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 9$$

中心 (1, 0)、半径 3 の円

連立不等式 $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ 、 $x + 2y \leq 10$ 、 $2x + y \leq 8$ の表す領域において、 $x + y$ の最大値と最小値を求めよ。

最大値 6 最小値 0

頂点を求める。 $x + 2y = 10$ と $y = 0$: $(10, 0)$ 。 $2 \times 10 + 0 = 20 > 8$ なので不適 (頂点でない)。

$2x + y = 8$ と $y = 0$: $(4, 0)$ 。 $4 + 0 = 4 \leq 10$ を満たすのでOK。

$x + 2y = 10$ と $2x + y = 8$ の交点 : $y = 8 - 2x$ を代入して $x + 2(8 - 2x) = 10 \rightarrow x + 16 - 4x = 10 \rightarrow -3x = -6 \rightarrow x = 2$, $y = 4$ 。交点 $(2, 4)$ 。

$x + 2y = 10$ と $x = 0$: $(0, 5)$ 。 $2 \times 0 + 5 = 5 \leq 8$ を満たすのでOK。

頂点は $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(2, 4)$, $(0, 5)$ 。 $x + y$ の値 : 0, 4, 6, 5。

最大値 6 ($x = 2$, $y = 4$)、最小値 0 ($x = 0$, $y = 0$)

点 $A(4, 0)$ を通り、傾き m の直線がある (m はすべての実数値を取り得る)。この直線と y 軸との交点を Q とする。 m の値が変化するとき、線分 AQ の中点 P の軌跡を求めよ。

直線の式は $y = m(x - 4)$ 。 y 軸との交点 Q は $x = 0$ を代入して $y = m(0 - 4) = -4m$ 、つまり $Q(0, -4m)$ 。

中点 P の座標は、 A と Q の座標の平均：

$$P\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+(-4m)}{2}\right) = (2, -2m)$$

ここで x 座標はつねに 2 で、 m の値に関係なく変わらない。一方 $y = -2m$ は m がすべての実数を取れるので、 y もすべての実数値を取り得る。

つまり、点 P の x 座標は常に 2 に固定され、 y 座標に制限はない——これは直線 $x = 2$ 全体が軌跡であることを意味する。

軌跡は直線 $x = 2$ (y はすべての実数)

実数 x, y が $x + y = 6$ を満たすとき、 $x^2 + y^2$ の最小値を求めよ。(ヒント： $x^2 + y^2$ は原点からの距離の2乗)

【方法1：1文字消去】 $x + y = 6$ より $y = 6 - x$ 。代入して

$$x^2 + y^2 = x^2 + (6 - x)^2 = x^2 + 36 - 12x + x^2 = 2x^2 - 12x + 36 = 2(x - 3)^2 + 18$$

x は実数全体を動けるので、下に凸の頂点がそのまま最小値。 $x = 3$ のとき最小値 18 (このとき $y = 3$)。

【方法2：点と直線の距離（検算）】 $x^2 + y^2$ は点 (x, y) と原点との距離の2乗。条件 $x + y = 6$ は直線 $x + y - 6 = 0$ 上を動くという意味だから、 $x^2 + y^2$ の最小値は「原点から直線 $x + y - 6 = 0$ までの距離」の2乗に等しい。

点と直線の距離の公式より、原点から $x + y - 6 = 0$ までの距離は $\frac{|0 + 0 - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ 。

距離の2乗は $(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$ 。方法1の答えと一致する。

$x = 3, y = 3$ のとき最小値 18

実数 x, y が $(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 4$ を満たすとき、 $x+2y$ の最大値と最小値を求めよ。

$x+2y=k$ とおくと、これは傾き $-\frac{1}{2}$ の直線 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{k}{2}$ の集合。この直線が、中心 $(2, 1)$ 、半径 2 の円の内部（境界を含む）と共有点を持つような k の範囲を考える。

直線 $x+2y-k=0$ が円と共有点を持つのは、円の中心からこの直線までの距離が半径以下のとき。中心 $(2, 1)$ から直線 $x+2y-k=0$ までの距離は

$$\frac{|2+2 \times 1-k|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|4-k|}{\sqrt{5}}$$

$$\text{これが半径 } 2 \text{ 以下: } \frac{|4-k|}{\sqrt{5}} \leq 2 \rightarrow |4-k| \leq 2\sqrt{5} \rightarrow 4-2\sqrt{5} \leq k \leq 4+2\sqrt{5}$$

$k = x+2y$ がとり得る範囲がちょうどこの区間になるので、最大値は k の上限、最小値は k の下限。

最大値 $4+2\sqrt{5}$ 、最小値 $4-2\sqrt{5}$

2定点 $A(1, 2)$ 、 $B(4, -1)$ に対し、 $PA : PB = 1 : 2$ を満たす点Pの軌跡を求めよ。

$P(x, y)$ とおく。 $PA : PB = 1 : 2$ より $PB = 2PA$ 、両辺2乗して $PB^2 = 4PA^2$ 。

$$PA^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2, PB^2 = (x - 4)^2 + (y + 1)^2$$

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 4[(x - 1)^2 + (y - 2)^2]$$

$$\text{左辺を展開：} x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + y^2 - 8x + 2y + 17$$

$$\text{右辺を展開：} 4(x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4) = 4x^2 + 4y^2 - 8x - 16y + 20$$

$$\text{左辺} - \text{右辺} = 0 : (x^2 + y^2 - 8x + 2y + 17) - (4x^2 + 4y^2 - 8x - 16y + 20) = 0$$

$$-3x^2 - 3y^2 + 18y - 3 = 0, -3 \text{ で割って } x^2 + y^2 - 6y + 1 = 0$$

$$y \text{ について平方完成：} x^2 + (y - 3)^2 - 9 + 1 = 0 \rightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 8$$

$$\text{半径は } \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

軌跡は中心 $(0, 3)$ 、半径 $2\sqrt{2}$ の円

点Pが円 $x^2 + y^2 = 1$ 上を動くとき、点 $A(3, 4)$ とPの距離の最大値と最小値を求めよ。

円 $x^2 + y^2 = 1$ は原点 O を中心とする半径 1 の円。原点とAの距離は

$$OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

PはOを中心とする半径1の円周上を動くので、AP の距離は「OAの距離」から「半径1」だけ変動する。最大になるのは、O、円周上の点P、Aが一直線上に並び、PがAと反対側（Oから見てAと逆方向）にあるとき： $AP = OA + 1 = 5 + 1 = 6$ 。

最小になるのは、O・P・Aが一直線上に並び、PがAに近い側にあるとき： $AP = OA - 1 = 5 - 1 = 4$ 。

（三角形の成立条件から、 $|OA - 1| \leq AP \leq OA + 1$ が常に成り立ち、両端は一直線上に並ぶときに実現される。）

最大値 6、最小値 4

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。軌跡と領域を組み合わせた、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

円の領域で $x+y$ の最大最小

実数 x, y が $(x-3)^2 + (y-4)^2 \leq 25$ を満たすとき、 $x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

最大値 $7+5\sqrt{2}$ 最小値 $7-5\sqrt{2}$

$x+y=k$ とおくと、直線 $x+y-k=0$ がこの円（中心 $(3,4)$ 、半径 5）と共有点を持つ k の範囲を求めればよい。

中心 $(3,4)$ から直線 $x+y-k=0$ までの距離は $\frac{|3+4-k|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|7-k|}{\sqrt{2}}$ 。

これが半径 5 以下： $\frac{|7-k|}{\sqrt{2}} \leq 5 \rightarrow |7-k| \leq 5\sqrt{2} \rightarrow 7-5\sqrt{2} \leq k \leq 7+5\sqrt{2}$

最大値 $7+5\sqrt{2}$ 、最小値 $7-5\sqrt{2}$

2定点 $A(-2, 0)$ 、 $B(4, 0)$ に対し、 $PA : PB = 1 : 2$ を満たす点Pの軌跡を求めよ。さらに、この軌跡上の点のうち、原点Oからの距離が最大となる点の座標と、そのときの距離を求めよ。

軌跡の中心 (-4 , 0) 半径 4 最大となる点 (-8 , 0) 距離 8

【軌跡】 $P(x, y)$ とおく。 $PA : PB = 1 : 2$ より $PB = 2PA$ 、両辺2乗して $PB^2 = 4PA^2$ 。

$$(x - 4)^2 + y^2 = 4[(x + 2)^2 + y^2]$$

左辺展開： $x^2 - 8x + 16 + y^2$ 、右辺展開： $4x^2 + 16x + 16 + 4y^2$

左辺 - 右辺 = 0： $-3x^2 - 24x - 3y^2 = 0$ 、 -3 で割って $x^2 + 8x + y^2 = 0$

平方完成： $(x + 4)^2 - 16 + y^2 = 0 \rightarrow (x + 4)^2 + y^2 = 16$

軌跡は中心 $(-4, 0)$ 、半径 4 の円。

【原点からの最大距離】 原点Oから円の中心 $(-4, 0)$ までの距離は 4。円周上の点でOから最も遠いのは、O・中心・その点が一直線上に並び、中心よりさらに遠い側にある点。中心から見てOと反対方向 (x 軸負の方向) に半径分だけ進んだ点だから、

その点は $(-4 - 4, 0) = (-8, 0)$ 。距離は $OA_{\text{中心}} + r = 4 + 4 = 8$ 。

(検算： $(-8 + 4)^2 + 0^2 = 16$ で確かに円上の点になっている。)

軌跡は中心 $(-4, 0)$ 、半径 4 の円。原点から最も遠い点は $(-8, 0)$ 、そのときの距離は 8

連立不等式 $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ 、 $x + y \leq 6$ の表す領域において、 $x^2 + y^2$ の最大値と最小値を求めよ。

最大値 36 最小値 0

領域は3つの頂点 $(0, 0)$ 、 $(6, 0)$ 、 $(0, 6)$ を持つ直角三角形（原点からの距離の2乗 $x^2 + y^2$ は原点に近いほど小さく、遠いほど大きい）。

$x^2 + y^2$ は x 、 y の1次式ではないので、STEP4のように「頂点だけ調べれば必ず答え」という保証はない。ただし $x^2 + y^2$ は原点からの距離の2乗＝原点を中心とする円の半径の2乗なので、原点を中心とする円を領域の中で広げていくイメージで考える。

領域は原点 $(0, 0)$ 自身を含むので、最小値は原点でとる 0。

領域を含む最小の円（原点中心）は、領域内で原点から最も遠い点を半径にする円になる。三角形の頂点 $(6, 0)$ 、 $(0, 6)$ のうち原点から最も遠いのはどちらも距離 6（ $x^2 + y^2 = 36$ ）で、辺上や内部の点はこれより原点に近い。

最大値 36 ($x = 6, y = 0$ または $x = 0, y = 6$)、**最小値 0** ($x = 0, y = 0$)

応4

距離の2乗の差が一定の軌跡（直線になる）

2定点 $A(0, 0)$ 、 $B(8, 0)$ に対し、 $PA^2 - PB^2 = 32$ を満たす点Pの軌跡を求めよ。直線 $x =$ いくつになるか答えよ。

$x =$ 6

$P(x, y)$ とおく。 $PA^2 = x^2 + y^2$ 、 $PB^2 = (x - 8)^2 + y^2$ 。

$$PA^2 - PB^2 = x^2 + y^2 - [(x - 8)^2 + y^2] = x^2 - (x^2 - 16x + 64) = 16x - 64$$

これが 32 に等しいので $16x - 64 = 32 \rightarrow 16x = 96 \rightarrow x = 6$ 。

(y は式に現れないので、 y はすべての実数を取り得る。「距離の2乗の和が一定」なら円、「距離の2乗の差が一定」なら直線になることに注目。)

軌跡は直線 $x = 6$

応5

四角形の領域で1次式の最大最小

連立不等式 $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ 、 $x + y \leq 5$ 、 $2x + y \leq 8$ の表す領域において、 $3x + 4y$ の最大値と最小値を求めよ。

最大値 20 最小値 0

頂点を求める。 $2x + y = 8$ と $y = 0$: $(4, 0)$ 。 $4 + 0 = 4 \leq 5$ を満たすのでOK。

$x + y = 5$ と $2x + y = 8$ の交点 : 2式を引くと $x = 3$ 、 $y = 5 - 3 = 2$ 。交点 $(3, 2)$ 。検算 : $2 \times 3 + 2 = 8$ ✓

$x + y = 5$ と $x = 0$: $(0, 5)$ 。 $2 \times 0 + 5 = 5 \leq 8$ を満たすのでOK。

頂点は $(0, 0)$ 、 $(4, 0)$ 、 $(3, 2)$ 、 $(0, 5)$ 。 $3x + 4y$ の値 :

$(0, 0) \rightarrow 0$ $(4, 0) \rightarrow 12$ $(3, 2) \rightarrow 9 + 8 = 17$ $(0, 5) \rightarrow 20$

最大値 20 ($x = 0$, $y = 5$)、最小値 0 ($x = 0$, $y = 0$)

