

円の方程式

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～8）

1

標準形をそのまま読む

円 $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$ の中心の座標と半径を求めよ。

中心 $x = \underline{3}$ $y = \underline{-2}$ 半径 $r = \underline{4}$

$(x - 3)^2$ から中心の x 座標は 3、 $(y + 2)^2 = (y - (-2))^2$ から y 座標は -2 。
 $16 = 4^2$ より半径は 4。

中心 $(3, -2)$ 、半径 4

2

標準形をそのまま読む（符号に注意）

円 $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 9$ の中心の座標と半径を求めよ。

中心 $x = \underline{-5}$ $y = \underline{1}$ 半径 $r = \underline{3}$

$(x + 5)^2 = (x - (-5))^2$ から中心の x 座標は -5 、 y 座標は 1 。 $9 = 3^2$ より半径は 3 。

中心 $(-5, 1)$ 、半径 3

3

一般形→標準形（1文字だけ完成）

円 $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ の中心の座標と半径を求めよ。

中心 $x = \underline{3}$ $y = \underline{0}$ 半径 $r = \underline{1}$

$x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$ y はそのまま。

$(x - 3)^2 - 9 + y^2 + 8 = 0$

$(x - 3)^2 + y^2 = 1$

中心 $(3, 0)$ 、半径 1

4

一般形→標準形（両方完成）

円 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ の中心の座標と半径を求めよ。

中心 $x = \underline{-1}$ $y = \underline{2}$ 半径 $r = \underline{3}$

$x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$

$y^2 - 4y = (y - 2)^2 - 4$

$(x + 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 - 4 = 0$

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$

中心 $(-1, 2)$ 、半径 3

5

一般形→標準形

円 $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 13 = 0$ の中心の座標と半径を求めよ。

中心 $x = \underline{4}$ $y = \underline{-1}$ 半径 $r = \underline{2}$

$$x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16$$

$$y^2 + 2y = (y + 1)^2 - 1$$

$$(x - 4)^2 - 16 + (y + 1)^2 - 1 + 13 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

中心 $(4, -1)$ 、半径 2

6

点と直線の距離（円の位置判定の基礎）

点 $(2, 1)$ と直線 $3x - 4y + 5 = 0$ の距離 d を求めよ。

$d = \underline{7/5}$

$$d = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|6 - 4 + 5|}{5} = \frac{7}{5}$$

$$d = \frac{7}{5} \quad (= 1.4)$$

7

円と直線の位置関係（共有点なし）

円 $x^2 + y^2 = 9$ の中心と直線 $x + y - 6 = 0$ の距離 d を求めよ。また、この円と直線の共有点はいくつか。

$d = \underline{3\sqrt{2}}$ 共有点の個数 $\underline{0}$

中心 $(0, 0)$ 、半径 $r = 3$ 。

$$d = \frac{|0 + 0 - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

$3\sqrt{2} \approx 4.24 > 3 = r$ なので共有点はない。

$d = 3\sqrt{2}$ 、共有点は0個

円 $x^2 + y^2 = 25$ の中心と直線 $3x + 4y - 25 = 0$ の距離 d を求めよ。また、この円と直線の共有点はいくつか。

$d = \underline{5}$ 共有点の個数 $\underline{1}$

中心 $(0, 0)$ 、半径 $r = 5$ 。

$$d = \frac{|0 + 0 - 25|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

$d = r$ なので接する（共有点1個）。

$d = 5$ 、共有点は1個

標準（9～14） ※判定は自分で行おう

9 円 $x^2 + y^2 = 20$ と直線 $y = x + 2$ の共有点の個数を求めよ。また共有点があれば、そのx座標をすべて求めよ（コンマ区切り、順不同）。

共有点の個数 $\underline{2}$ x座標 $\underline{-4, 2}$

中心 $(0, 0)$ 、半径 $r = \sqrt{20}$ 。直線を $x - y + 2 = 0$ にすると

$$d = \frac{|0 - 0 + 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$\sqrt{2} \approx 1.41 < \sqrt{20} \approx 4.47$ なので2点で交わる。代入すると

$$x^2 + (x + 2)^2 = 20 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 16 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 2) = 0$$

$x = -4$ ($y = -2$)、 $x = 2$ ($y = 4$)。

共有点2個、 $x = -4, 2$

- 10 円 $x^2 + y^2 = 8$ と直線 $y = -x + 4$ の共有点の個数を求めよ。また共有点があれば、その座標を求めよ。

共有点の個数 1 接点 $x = \underline{2}$ $y = \underline{2}$

中心 $(0, 0)$ 、半径 $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ 。直線を $x + y - 4 = 0$ にすると

$$d = \frac{|0 + 0 - 4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$d = r$ なので接する。代入すると

$$x^2 + (-x + 4)^2 = 8 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0$$

$$x = 2, y = -2 + 4 = 2。$$

共有点1個、接点 $(2, 2)$

- 11 円 $x^2 + y^2 = 13$ 上の点 $(3, 2)$ における接線の方程式を $y = ax + b$ の形で求めよ。

$a = \underline{-3/2}$ $b = \underline{13/2}$

公式 $x_1x + y_1y = r^2$ に $(x_1, y_1) = (3, 2)$ を代入する。

$$3x + 2y = 13$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$$

$$a = -\frac{3}{2}, b = \frac{13}{2}$$

- 12 円 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ 上の点 $(5, 5)$ における接線の方程式を $y = ax + b$ の形で求めよ。

$$a = \underline{-3/4} \quad b = \underline{35/4}$$

中心 $(2, 1)$ 。公式 $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$ に $(x_1, y_1) = (5, 5)$ を代入する。

$$3(x - 2) + 4(y - 1) = 25$$

$$3x + 4y = 35$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{35}{4}$$

$$a = -\frac{3}{4}, b = \frac{35}{4}$$

- 13 直線 $y = x + k$ が円 $x^2 + y^2 = 18$ に接するとき、 k の値を求めよ（コンマ区切りで両方入力）。

$$k = \underline{6, -6}$$

直線を $x - y + k = 0$ にする。中心 $(0, 0)$ から半径 $r = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ の距離になればよい。

$$d = \frac{|k|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \Rightarrow |k| = 6$$

$$k = 6, -6$$

- 14 直線 $y = 2x + k$ が円 $x^2 + y^2 = 5$ に接するとき、 k の値を求めよ（コンマ区切りで両方入力）。

$$k = \underline{5, -5}$$

直線を $2x - y + k = 0$ にする。中心 $(0, 0)$ から半径 $r = \sqrt{5}$ の距離になればよい。

$$d = \frac{|k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow |k| = 5$$

$$k = 5, -5$$

挑戦 (15~18)

15

2円の位置関係 (外接)

円 $x^2 + y^2 = 9$ (中心 $(0, 0)$ 、半径 3) と円 $(x - 7)^2 + y^2 = 16$ (中心 $(7, 0)$ 、半径 4) について、中心間の距離 d と、共通接線の本数を求めよ。

$d = \underline{7}$ 共通接線の本数 $\underline{3}$

中心間の距離 $d = 7$ 。 $r_1 + r_2 = 3 + 4 = 7$ なので $d = r_1 + r_2 \rightarrow$ 外接。

$d = 7$ 、共通接線は3本 (外接)

16

2円の位置関係 (内接)

円 $x^2 + y^2 = 25$ (中心 $(0, 0)$ 、半径 5) と円 $(x - 3)^2 + y^2 = 4$ (中心 $(3, 0)$ 、半径 2) について、中心間の距離 d と、共通接線の本数を求めよ。

$d = \underline{3}$ 共通接線の本数 $\underline{1}$

中心間の距離 $d = 3$ 。 $|r_1 - r_2| = |5 - 2| = 3$ なので $d = |r_1 - r_2| \rightarrow$ 内接。

$d = 3$ 、共通接線は1本 (内接)

点 $(0, 5)$ から円 $x^2 + y^2 = 9$ に引いた2本の接線の傾きを求めよ（コンマ区切りで両方入力）。

傾き 4/3, -4/3

点 $(0, 5)$ を通る直線は $y = mx + 5$ (y 切片が5) とおける。これを $mx - y + 5 = 0$ の形にして、中心 $(0, 0)$ からの距離が半径 $r = 3$ に等しいとおく。

$$d = \frac{|5|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3$$

$$\sqrt{m^2 + 1} = \frac{5}{3} \Rightarrow m^2 + 1 = \frac{25}{9} \Rightarrow m^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow m = \pm \frac{4}{3}$$

$$\text{傾きは } \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}$$

円 $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ と直線 $7x + y - 34 = 0$ の共有点の個数を求めよ。また共有点があれば、そのx座標をすべて求めよ（コンマ区切り、順不同）。

共有点の個数 2 x座標 4, 5

まず円を標準形にする。

$$x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1, y^2 - 4y = (y - 2)^2 - 4$$

$$(x - 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 - 20 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25 \quad \text{中心 } (1, 2)、\text{半径 } 5。$$

直線を $y = -7x + 34$ にして距離を確認する。

$$d = \frac{|7 \cdot 1 + 2 - 34|}{\sqrt{7^2 + 1^2}} = \frac{25}{\sqrt{50}} = \frac{25}{5\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3.54 < 5$$

よって2点で交わる。円の式に代入して確かめると

$$(x - 1)^2 + (-7x + 32)^2 = 25$$

$$x^2 - 2x + 1 + 49x^2 - 448x + 1024 = 25$$

$$50x^2 - 450x + 1000 = 0 \Rightarrow x^2 - 9x + 20 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x - 5) = 0$$

$$x = 4 \ (y = 6)、x = 5 \ (y = -1)。$$

共有点2個、 $x = 4, 5$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。弦・接線の長さや3点を通る円など、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

弦の長さ

円 $x^2 + y^2 = 25$ と直線 $x - 2y + 5 = 0$ が交わってできる弦の長さを求めよ。

弦の長さ $4\sqrt{5}$

中心 $(0, 0)$ 、半径 $r = 5$ 。中心から直線までの距離を求める。

$$d = \frac{|0 - 0 + 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

弦の長さは、中心・弦の midpoint・弦の端点で直角三角形ができることから $L = 2\sqrt{r^2 - d^2}$ で求められる（三平方の定理）。

$$L = 2\sqrt{25 - 5} = 2\sqrt{20} = 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

弦の長さ $4\sqrt{5}$

応2

接線の長さ

点 $(7, 1)$ から円 $x^2 + y^2 = 9$ に引いた接線の長さを求めよ。

接線の長さ $\sqrt{41}$

中心 $(0, 0)$ 、半径 $r = 3$ 。外部の点と中心の距離を求める。

$$d = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$$

接点・中心・外部の点を結ぶと、接線は半径に垂直なので直角三角形ができる。三平方の定理より接線の長さ L は

$$L = \sqrt{d^2 - r^2} = \sqrt{50 - 9} = \sqrt{41}$$

接線の長さ $\sqrt{41}$

応3

3点を通る円

3点 $A(0, 0)$ 、 $B(6, 0)$ 、 $C(0, 8)$ を通る円の中心の座標と半径を求めよ。

中心 $x =$ 3 $\quad y =$ 4 $\quad$ 半径 $r =$ 5

円の一般形 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ に3点を代入する。

$$A(0, 0) : F = 0$$

$$B(6, 0) : 36 + 6D + F = 0 \Rightarrow D = -6$$

$$C(0, 8) : 64 + 8E + F = 0 \Rightarrow E = -8$$

よって $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ 。平方完成すると

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9 + 16 = 25$$

中心 $(3, 4)$ 、半径 5

応4

2円の共通接線の長さ

円A（中心 $(0, 0)$ 、半径 2）と円B（中心 $(9, 0)$ 、半径 5）の共通外接線（2円の外側に接する直線）の長さを求めよ。

共通外接線の長さ $6\sqrt{2}$

中心間の距離 $d = 9$ 。共通外接線の長さ L は、半径の差 $|r_1 - r_2|$ を使って

$$L = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$$

（円Bの半径を $r_1 - r_2 = 3$ だけ縮めて円Aと同じ半径 2 にそろえ、中心Aから縮めた中心Bまでの距離を斜辺とする直角三角形を考えるとこの式になる。）

$$L = \sqrt{9^2 - (5 - 2)^2} = \sqrt{81 - 9} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

共通外接線の長さ $6\sqrt{2}$

応5

円上の点と定点の距離の最大最小

円 $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ 上を点Pが動くとき、定点 $A(2, -7)$ と点Pの距離の最大値・最小値を求めよ。

最大値 14 最小値 6

円の中心を $C(2, 3)$ 、半径 $r = 4$ とする。まず中心Cと定点Aの距離を求める。

$$x \text{ 座標が同じ } 2 \text{ なので } AC = |3 - (-7)| = 10$$

定点Aは円の外部にある（ $AC = 10 > r = 4$ ）。点PはCを中心とする半径4の円周上を動くので、APが最大になるのはAとCを結ぶ直線が円と交わる遠い方の点、最小になるのは近い方の点。

$$\text{最大値} = AC + r = 10 + 4 = 14$$

$$\text{最小値} = AC - r = 10 - 4 = 6$$

最大値 14、最小値 6