

直線の方程式

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～8）

1

傾きと1点

傾き 3、点 (2, 1) を通る直線の方程式を $y = ax + b$ の形で求めよ。

$a = \underline{3}$ $b = \underline{-5}$

$$y - 1 = 3(x - 2)$$

$$y = 3x - 6 + 1$$

$$y = 3x - 5$$

2

2点を通る

2点 (1, 4)、(3, 10) を通る直線の方程式を $y = ax + b$ の形で求めよ。

$$a = \underline{3} \quad b = \underline{1}$$

$$\text{傾き} = \frac{10 - 4}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y - 4 = 3(x - 1)$$

$$y = 3x + 1$$

3

2点を通る (傾き負)

2点 (0, 5)、(2, 1) を通る直線の方程式を $y = ax + b$ の形で求めよ。

$$a = \underline{-2} \quad b = \underline{5}$$

$$\text{傾き} = \frac{1 - 5}{2 - 0} = \frac{-4}{2} = -2$$

y 切片は (0, 5) を通るのでそのまま 5。

$$y = -2x + 5$$

4

特殊な直線 (x軸に垂直)

点 (4, -2) を通り、 x 軸に垂直な直線の方程式を求めよ。

$$x = \underline{4}$$

x 軸に垂直 (y 軸に平行) な直線は、 x 座標が常に一定の縦の直線になる。

$$x = 4$$

5

傾きが分数

傾き $-\frac{1}{2}$ 、点 $(-2, 3)$ を通る直線の方程式を $y = ax + b$ の形で求めよ。

$$a = \underline{-1/2} \quad b = \underline{2}$$

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - (-2))$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 1 + 3$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

6

2点を通る

2点 $(-1, -3)$ 、 $(3, 5)$ を通る直線の方程式を $y = ax + b$ の形で求めよ。

$$a = \underline{2} \quad b = \underline{-1}$$

$$\text{傾き} = \frac{5 - (-3)}{3 - (-1)} = \frac{8}{4} = 2$$

$$y - 5 = 2(x - 3)$$

$$y = 2x - 1$$

7

特殊な直線 (x軸に平行)

点 $(5, -3)$ を通り、 x 軸に平行な直線の方程式を求めよ。

$$y = \underline{-3}$$

x 軸に平行な直線は、 y 座標が常に一定の横の直線になる。

$$y = -3$$

直線 $2x + 3y - 6 = 0$ の傾きと y 切片を求めよ。

傾き $-2/3$ y 切片 2

$$3y = -2x + 6$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

$$\text{傾き } -\frac{2}{3}, y\text{切片 } 2$$

標準 (9~14) ※パターンは自分で判定

- 9 直線 $y = 3x - 2$ に平行で、点 $(2, 5)$ を通る直線の方程式を $y = ax + b$ の形で求めよ。

$a =$ 3 $b =$ -1

平行なので傾きは同じ $m = 3$ 。

$$y - 5 = 3(x - 2)$$

$$y = 3x - 1$$

- 10 直線 $y = -2x + 5$ に垂直で、点 $(4, 1)$ を通る直線の方程式を $y = ax + b$ の形で求めよ。

$a =$ $1/2$ $b =$ -1

垂直なので $-2 \times m = -1$ より $m = \frac{1}{2}$ 。

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 4)$$

$$y = \frac{1}{2}x - 2 + 1$$

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

- 11 2直線 $3x - y + 2 = 0$ と $ax + 2y - 1 = 0$ が平行になるように、定数 a の値を求めよ。

$$a = \underline{-6}$$

$$3x - y + 2 = 0 \rightarrow y = 3x + 2 \text{ (傾き } 3)$$

$$ax + 2y - 1 = 0 \rightarrow y = -\frac{a}{2}x + \frac{1}{2} \text{ (傾き } -\frac{a}{2})$$

$$\text{平行なので傾きが等しい：} -\frac{a}{2} = 3$$

$$a = -6$$

- 12 2直線 $x + 2y - 4 = 0$ と $ax - y + 3 = 0$ が垂直になるように、定数 a の値を求めよ。

$$a = \underline{2}$$

$$x + 2y - 4 = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2 \text{ (傾き } -\frac{1}{2})$$

$$ax - y + 3 = 0 \rightarrow y = ax + 3 \text{ (傾き } a)$$

$$\text{垂直なので傾きの積が } -1 : -\frac{1}{2} \times a = -1$$

$$a = 2$$

- 13 点 $(1, 2)$ と直線 $y = x + 4$ の距離を求めよ。

$$\text{距離 } \underline{3\sqrt{2}/2}$$

$$\text{一般形に直すと } x - y + 4 = 0 \text{ (} a = 1, b = -1, c = 4 \text{)}。$$

$$d = \frac{|1 \times 1 - 1 \times 2 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|1 - 2 + 4|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\text{距離は } \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

14 点 $(-1, 3)$ と直線 $2x - y - 5 = 0$ の距離を求めよ。

距離 $2\sqrt{5}$

$a = 2, b = -1, c = -5$ を代入する。

$$d = \frac{|2 \times (-1) - 1 \times 3 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2 - 3 - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

距離は $2\sqrt{5}$

挑戦 (15~18)

15

交点を利用する

2直線 $x + y - 5 = 0$ と $2x - y - 1 = 0$ の交点と、点 $(0, 0)$ を通る直線の方程式を $y = ax + b$ の形で求めよ。

$$a = \underline{\frac{3}{2}} \quad b = \underline{0}$$

まず2直線の交点を連立方程式で求める。

$x + y - 5 = 0$ 、 $2x - y - 1 = 0$ を辺々加えると $3x - 6 = 0 \rightarrow x = 2$ 、 $y = 5 - 2 = 3$ 。交点は $(2, 3)$ 。

交点 $(2, 3)$ と原点 $(0, 0)$ を通る直線の傾きは $\frac{3 - 0}{2 - 0} = \frac{3}{2}$ 。

原点を通るので切片は 0。

$$y = \frac{3}{2}x$$

16

距離の条件から係数を求める (答えは2つ)

直線 $y = ax - 2$ と点 $(0, 3)$ との距離が $\sqrt{5}$ であるとき、定数 a の値を求めよ。(複数ある場合はコンマ区切りで入力)

$a =$ 2,-2

一般形に直すと $ax - y - 2 = 0$ 。点 $(0, 3)$ との距離が $\sqrt{5}$ なので

$$\frac{|a \times 0 - 1 \times 3 - 2|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

$$\frac{|-5|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{5} \rightarrow \frac{5}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

$$\text{両辺に } \sqrt{a^2 + 1} \text{ をかけて整理すると } \sqrt{a^2 + 1} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\text{両辺を2乗して } a^2 + 1 = 5 \rightarrow a^2 = 4$$

$$a = 2, -2$$

17

2点を通る直線と原点との距離

2点 $(2, 1)$ 、 $(5, 7)$ を通る直線と、点 $(0, 0)$ との距離を求めよ。

距離 3√5/5

傾き $= \frac{7-1}{5-2} = \frac{6}{3} = 2$ 。 $y - 1 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 3$ 、一般形は $2x - y - 3 = 0$ 。

$$d = \frac{|2 \times 0 - 1 \times 0 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\text{距離は } \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

三角形の頂点 $A(0, 0)$ 、 $B(4, 2)$ 、 $C(1, 5)$ について、辺ABを底辺としたときの高さ h （点Cと直線ABの距離）と、三角形の面積 S を求めよ。

$$h = \underline{9\sqrt{5}/5} \quad S = \underline{9}$$

直線ABは、2点 $A(0, 0)$ 、 $B(4, 2)$ を通るので傾き $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 、原点を通るので $y = \frac{1}{2}x$ 、一般形は $x - 2y = 0$ 。

$$h = \frac{|1 \times 1 - 2 \times 5 + 0|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|1 - 10|}{\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

底辺ABの長さは $\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ （三平方の定理）。

$$S = \frac{1}{2} \times \text{底辺} \times h = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{9\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{2} \times \frac{18 \times 5}{5} = \frac{1}{2} \times 18$$

$$\text{高さ } h = \frac{9\sqrt{5}}{5}、\text{面積 } S = 9$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。図形と方程式の総合力を試そう。

応1

3直線が三角形を作らない条件

3直線 $l_1: x + y = 4$ 、 $l_2: 2x - y = -1$ 、 $l_3: ax + y = 6$ が三角形を作らないとき、定数 a の値をすべて求めよ。（小さい順にコンマ区切りで入力）

$a =$ -2,1,3

3直線が三角形を作らないのは、「どれか2本が平行」または「3本とも1点で交わる」ときのいずれか。全部で3通り考えられる。

$l_1: y = -x + 4$ （傾き -1 ）、 $l_2: y = 2x + 1$ （傾き 2 ）、 $l_3: y = -ax + 6$ （傾き $-a$ ）

(i) $l_3 \parallel l_1$ のとき： $-a = -1 \rightarrow a = 1$

(ii) $l_3 \parallel l_2$ のとき： $-a = 2 \rightarrow a = -2$

(iii) 3直線が1点で交わるとき：まず l_1, l_2 の交点を求める。 $x + y = 4$ 、 $2x - y = -1$ を辺々加えると $3x = 3 \rightarrow x = 1$ 、 $y = 3$ 。交点は $(1, 3)$ 。

l_3 がこの点を通るには $a \times 1 + 3 = 6 \rightarrow a = 3$

以上をまとめると、平行になる場合が $a = 1, -2$ 、1点に集まる場合が $a = 3$ の合計3通り。

$a = -2, 1, 3$

直線 $l: y = 2x - 3$ を、点 $A(1, 2)$ に関して対称移動した直線の方程式を $y = ax + b$ の形で求めよ。

$$a = \underline{2} \quad b = \underline{3}$$

対称移動後の直線上の点を (x', y') とすると、これは l 上のある点 (x, y) と点 A に関して対称。

点 A は中点なので $x = 2 \times 1 - x' = 2 - x'$ 、 $y = 2 \times 2 - y' = 4 - y'$ 。

これを l の式 $y = 2x - 3$ に代入する。

$$4 - y' = 2(2 - x') - 3$$

$$4 - y' = 4 - 2x' - 3 = 1 - 2x'$$

$$-y' = -3 - 2x'$$

$$y' = 2x' + 3$$

つまり対称移動後の直線は $y = 2x + 3$ (傾きは変わらず、切片だけが変わる)。

検算: l 上の点 $(0, -3)$ の、 A に関する対称点は $(2 \times 1 - 0, 2 \times 2 - (-3)) = (2, 7)$ 。これは $y = 2x + 3$ に $x = 2$ を代入した 7 と一致する。

$$y = 2x + 3$$

応3

直線に関して対称な点

点 $P(1, 4)$ の、直線 $l: x - y - 1 = 0$ に関して対称な点 P' の座標を求めよ。

$$x = \underline{5} \quad y = \underline{0}$$

手順1 Pから l に下ろした垂線の足Hを求める。 $l: y = x - 1$ (傾き1) なので、垂線の傾きは -1 。

Pを通り傾き -1 の直線: $y - 4 = -1(x - 1) \rightarrow y = -x + 5$

l との交点: $x - 1 = -x + 5 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3, y = 2$ 。よって $H(3, 2)$ 。

手順2 HはPとP'の中点なので、 $P' = 2H - P$ 。

x 座標: $2 \times 3 - 1 = 5$

y 座標: $2 \times 2 - 4 = 0$

検算: PP'の傾きは $\frac{0 - 4}{5 - 1} = -1$ で、 l の傾き1との積が -1 (垂直) になっている。

$P'(5, 0)$

応4

垂線の足

点 $Q(4, 5)$ から直線 $m: x + 2y - 4 = 0$ に下ろした垂線の足Hの座標を求めよ。

$$x = \underline{2} \quad y = \underline{1}$$

$m: y = -\frac{1}{2}x + 2$ (傾き $-\frac{1}{2}$) なので、垂線の傾きは 2 。

Qを通り傾き2の直線: $y - 5 = 2(x - 4) \rightarrow y = 2x - 3$

m との交点を求めるため、 $y = 2x - 3$ を $x + 2y - 4 = 0$ に代入する。

$$x + 2(2x - 3) - 4 = 0$$

$$x + 4x - 6 - 4 = 0$$

$$5x = 10 \rightarrow x = 2, y = 2 \times 2 - 3 = 1$$

検算: Hが m 上にあること $2 + 2 \times 1 - 4 = 0$ を満たす。

$H(2, 1)$

2点 $A(2, 1)$ 、 $B(6, 5)$ を結ぶ線分ABの垂直二等分線の方程式を $y = ax + b$ の形で求めよ。

$$a = \underline{-1} \quad b = \underline{7}$$

垂直二等分線は「線分ABの中点を通り、ABに垂直な直線」。

$$\text{中点} M = \left(\frac{2+6}{2}, \frac{1+5}{2} \right) = (4, 3)$$

$$\text{ABの傾き} = \frac{5-1}{6-2} = \frac{4}{4} = 1 \text{ なので、垂直な傾きは } -1。$$

$$M \text{ を通り傾き } -1 \text{ の直線 : } y - 3 = -1(x - 4) \rightarrow y = -x + 4 + 3$$

$$y = -x + 7$$