

点と座標・内分外分

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～7）

1

2点間の距離

2点 A(0, 0)、B(3, 4) の距離を求めよ。

距離 5

$$AB = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

距離は 5

2

2点間の距離

2点 $A(1, 2)$ 、 $B(4, 6)$ の距離を求めよ。

距離 5

横の差： $4 - 1 = 3$ 、縦の差： $6 - 2 = 4$

$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

距離は 5

3

中点

2点 $A(2, 3)$ 、 $B(8, 7)$ の中点 M の座標を求めよ。

M の座標 $x = \underline{5}$ $y = \underline{5}$

$$x = \frac{2 + 8}{2} = \frac{10}{2} = 5, y = \frac{3 + 7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

中点 M の座標は $(5, 5)$

4

内分点

2点 $A(0, 0)$ 、 $B(6, 9)$ を $1 : 2$ に内分する点 P の座標を求めよ。

P の座標 $x = \underline{2}$ $y = \underline{3}$

$$m = 1, n = 2$$

$$x = \frac{2 \times 0 + 1 \times 6}{1 + 2} = \frac{6}{3} = 2, y = \frac{2 \times 0 + 1 \times 9}{1 + 2} = \frac{9}{3} = 3$$

点 P の座標は $(2, 3)$

5

内分点

2点 A(1, 1)、B(7, 10) を 2 : 1 に内分する点 P の座標を求めよ。

P の座標 $x = \underline{5}$ $y = \underline{7}$

$$m = 2, n = 1$$

$$x = \frac{1 \times 1 + 2 \times 7}{2 + 1} = \frac{1 + 14}{3} = \frac{15}{3} = 5, y = \frac{1 \times 1 + 2 \times 10}{2 + 1} = \frac{1 + 20}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

点 P の座標は (5, 7)

6

外分点

2点 A(0, 0)、B(4, 2) を 3 : 1 に外分する点 P の座標を求めよ。

P の座標 $x = \underline{6}$ $y = \underline{3}$

$$m = 3, n = 1$$

$$x = \frac{-1 \times 0 + 3 \times 4}{3 - 1} = \frac{12}{2} = 6, y = \frac{-1 \times 0 + 3 \times 2}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

点 P の座標は (6, 3)

7

対称点 (原点)

点 A(3, -5) の原点に関する対称点の座標を求めよ。

対称点の座標 $x = \underline{-3}$ $y = \underline{5}$

原点对称は x 座標・ y 座標の両方の符号を反転する。

$$(3, -5) \rightarrow (-3, 5)$$

対称点の座標は (-3, 5)

- 8 2点 $A(-2, 3)$ 、 $B(2, 0)$ の距離を求めよ。

距離 5

$$\text{横の差} : 2 - (-2) = 4, \text{縦の差} : 0 - 3 = -3$$

$$AB = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

距離は 5

- 9 2点 $A(-1, -1)$ 、 $B(2, 3)$ の距離を求めよ。

距離 5

$$\text{横の差} : 2 - (-1) = 3, \text{縦の差} : 3 - (-1) = 4$$

$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

距離は 5

- 10 2点 $A(1, 4)$ 、 $B(11, -1)$ を $2:3$ に内分する点 P の座標を求めよ。

P の座標 $x = \underline{5}$ $y = \underline{2}$

$$m = 2, n = 3$$

$$x = \frac{3 \times 1 + 2 \times 11}{2 + 3} = \frac{3 + 22}{5} = \frac{25}{5} = 5, y = \frac{3 \times 4 + 2 \times (-1)}{2 + 3} = \frac{12 - 2}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

点 P の座標は $(5, 2)$

- 11 2点 A(2, 1)、B(5, 7) を 1 : 2 に外分する点 P の座標を求めよ。

P の座標 $x = \underline{-1}$ $y = \underline{-5}$

$m = 1, n = 2$ ($m < n$ なので、Pは点Aをこえた側に現れる)

$$x = \frac{-2 \times 2 + 1 \times 5}{1 - 2} = \frac{-4 + 5}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$y = \frac{-2 \times 1 + 1 \times 7}{1 - 2} = \frac{-2 + 7}{-1} = \frac{5}{-1} = -5$$

点 P の座標は (-1, -5)

- 12 三角形の頂点 A(2, 7)、B(-4, 1)、C(8, 1) の重心 G の座標を求めよ。

G の座標 $x = \underline{2}$ $y = \underline{3}$

$$x = \frac{2 + (-4) + 8}{3} = \frac{6}{3} = 2, y = \frac{7 + 1 + 1}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

重心 G の座標は (2, 3)

- 13 点 A(-1, 4) を、点 C(2, -3) に関して対称移動した点 B の座標を求めよ。

B の座標 $x = \underline{5}$ $y = \underline{-10}$

C が A, B の中点になるので $B = 2C - A$ 。

$$x = 2 \times 2 - (-1) = 4 + 1 = 5, y = 2 \times (-3) - 4 = -6 - 4 = -10$$

点 B の座標は (5, -10)

- 14 2点 $A(3, 1)$ 、 $B(x, 4)$ の距離が 5 であるとき、 x の値を求めよ。ただし $x > 3$ とする。

$$x = \underline{7}$$

$$\text{距離の公式より } (x - 3)^2 + (4 - 1)^2 = 5^2$$

$$(x - 3)^2 + 9 = 25$$

$$(x - 3)^2 = 16$$

$$x - 3 = \pm 4 \text{ より } x = 7 \text{ または } x = -1$$

$$x > 3 \text{ を満たすのは } x = 7 \text{ のみ。}$$

$$x = 7$$

15

等距離の条件式をつくる

点 $P(x, 0)$ が2点 $A(1, 2)$ 、 $B(5, 4)$ から等しい距離にあるとき、 x の値を求めよ。

$$x = \underline{\underline{9/2}}$$

$PA = PB$ なので、2乗して比べる（ルートのまま扱うより計算しやすい）。

$$PA^2 = (x - 1)^2 + (0 - 2)^2 = x^2 - 2x + 1 + 4 = x^2 - 2x + 5$$

$$PB^2 = (x - 5)^2 + (0 - 4)^2 = x^2 - 10x + 25 + 16 = x^2 - 10x + 41$$

$$PA^2 = PB^2 \text{ より } x^2 - 2x + 5 = x^2 - 10x + 41$$

$$-2x + 5 = -10x + 41$$

$$8x = 36$$

$$x = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$$

$$x = \frac{9}{2} (= 4.5)$$

16

内分点と外分点の両方を求める

2点 A(1, 2)、B(9, 10) について、線分 AB を 3 : 1 に内分する点 P と、3 : 1 に外分する点 Q の座標をそれぞれ求めよ。

$$P : x = \underline{7} \quad y = \underline{8} \quad Q : x = \underline{13} \quad y = \underline{14}$$

内分点 P ($m = 3, n = 1$) :

$$x = \frac{1 \times 1 + 3 \times 9}{3 + 1} = \frac{1 + 27}{4} = \frac{28}{4} = 7, \quad y = \frac{1 \times 2 + 3 \times 10}{4} = \frac{2 + 30}{4} = \frac{32}{4} = 8$$

外分点 Q ($m = 3, n = 1$) :

$$x = \frac{-1 \times 1 + 3 \times 9}{3 - 1} = \frac{-1 + 27}{2} = \frac{26}{2} = 13, \quad y = \frac{-1 \times 2 + 3 \times 10}{3 - 1} = \frac{-2 + 30}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

P(7, 8)、Q(13, 14)

17

対称点の逆算

点 A(1, 2) を、点 B に関して対称移動した点が C(7, 10) であるとき、点 B の座標を求めよ。

$$B \text{ の座標 } x = \underline{4} \quad y = \underline{6}$$

「B に関して対称」ということは、B は線分 AC の中点にあたる。

$$x = \frac{1 + 7}{2} = \frac{8}{2} = 4, \quad y = \frac{2 + 10}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

点 B の座標は (4, 6)

重心が $G(3, 4)$ である三角形の2頂点が $A(1, 2)$ 、 $B(2, 7)$ であるとき、残りの頂点 C の座標を求めよ。

C の座標 $x = \underline{6}$ $y = \underline{3}$

重心の公式 $G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$ を C について解く。

$$3 = \frac{1 + 2 + x_3}{3} \text{ より } x_3 = 9 - 1 - 2 = 6$$

$$4 = \frac{2 + 7 + y_3}{3} \text{ より } y_3 = 12 - 2 - 7 = 3$$

$$(\text{検算: } \left(\frac{1 + 2 + 6}{3}, \frac{2 + 7 + 3}{3} \right) = (3, 4) = G \text{ と一致})$$

点 C の座標は $(6, 3)$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。内分・外分・重心・対称点を組み合わせて考える、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

直線上を動く点と等距離条件

点 P は直線 $y = 2x$ 上にあり、2点 $A(0, 3)$ 、 $B(6, 1)$ から等しい距離にある。
 P の x 座標を t として、 t の値と、そのときの P の座標を求めよ。

$t = \underline{7}$ P の座標 $x = \underline{7}$ $y = \underline{14}$

P は直線 $y = 2x$ 上にあるので $P(t, 2t)$ とおける。

$$PA^2 = (t - 0)^2 + (2t - 3)^2 = t^2 + 4t^2 - 12t + 9 = 5t^2 - 12t + 9$$

$$PB^2 = (t - 6)^2 + (2t - 1)^2 = t^2 - 12t + 36 + 4t^2 - 4t + 1 = 5t^2 - 16t + 37$$

$PA = PB$ より $PA^2 = PB^2$ なので

$$5t^2 - 12t + 9 = 5t^2 - 16t + 37$$

$$4t = 28$$

$$t = 7$$

このとき $P = (7, 2 \times 7) = (7, 14)$

(検算: $PA^2 = 7^2 + 11^2 = 49 + 121 = 170$ 、 $PB^2 = 1^2 + 13^2 = 1 + 169 = 170$ で一致)

$t = 7$ 、点 P の座標は $(7, 14)$

四角形 ABCD が平行四辺形であるとき、頂点 D の座標を求めよ。ただし A(1, 2)、B(7, 2)、C(9, 6) とする。

D の座標 $x = \underline{3}$ $y = \underline{6}$

平行四辺形の対角線 AC と BD は互いに他方を**中点**で二等分する。

つまり「AC の中点」= 「BD の中点」が成り立つ。

$$\text{AC の中点} : \left(\frac{1+9}{2}, \frac{2+6}{2} \right) = (5, 4)$$

これが BD の中点にも等しいので、D の座標を (x, y) とすると

$$\frac{7+x}{2} = 5 \text{ より } x = 10 - 7 = 3$$

$$\frac{2+y}{2} = 4 \text{ より } y = 8 - 2 = 6$$

(検算：AB の移動量は (6, 0)。DC の移動量も $(9 - 3, 6 - 6) = (6, 0)$ で一致し、確かに平行四辺形になる)

頂点 D の座標は (3, 6)

応3

3点が一直線上にある条件

3点 $A(2, 3)$ 、 $B(6, a)$ 、 $C(14, 15)$ が一直線上にあるとき、 a の値を求めよ。

$$a = \underline{7}$$

3点が一直線上にあるとき、 B は線分 AC を内分する点になっている。 x 座標の並びから比を求める。

x 座標の差： A から B は $6 - 2 = 4$ 、 B から C は $14 - 6 = 8$

よって $AB : BC = 4 : 8 = 1 : 2$

同じ比が y 座標にもそのまま成り立つので、 B は $A(2, 3)$ 、 $C(14, 15)$ を $1 : 2$ に内分する点

$$a = \frac{2 \times 3 + 1 \times 15}{1 + 2} = \frac{6 + 15}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

$$a = 7$$

応4

距離が等しい条件から座標を求める

点 $A(3, 1)$ から点 $C(9, 9)$ までの距離と等しい距離にあり、 y 座標が 1 であるような点 B の x 座標をすべて求めよ。

$x =$ 13,-7 (コンマ区切りで入力)

まず AC の距離を求める。

$$AC = \sqrt{(9-3)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

点 B は y 座標が 1 、つまり A と同じ y 座標なので、 $B(x, 1)$ とおくと $AB = |x - 3|$ (横方向の距離だけで決まる)。

$$AB = AC = 10 \text{ より } |x - 3| = 10$$

$$x - 3 = 10 \text{ または } x - 3 = -10$$

$$x = 13 \text{ または } x = -7$$

$$x = 13, -7$$

点 $A(2, 5)$ を、点 $B(6, 1)$ に関して対称移動した点を C とする。さらに C を x 軸に関して対称移動した点を D とするとき、 D の座標を求めよ。

D の座標 $x = \underline{10}$ $y = \underline{3}$

まず C を求める。 B は A, C の中点になるので $C = 2B - A$ 。

$$C_x = 2 \times 6 - 2 = 12 - 2 = 10, C_y = 2 \times 1 - 5 = 2 - 5 = -3$$

よって $C = (10, -3)$ 。

次に C を x 軸に関して対称移動する (y 座標の符号を反転)。

$$D = (10, -(-3)) = (10, 3)$$

点 D の座標は $(10, 3)$