

図形と方程式 まとめ

解答（全27問）

氏名 _____

得点 _____ / 27点

DRILL

まとめテスト（標準）

基本（1～15）

1

2点間の距離

2点 A(1, 5)、B(4, 1) の距離を求めよ。

距離 5

横の差： $4 - 1 = 3$ 、縦の差： $1 - 5 = -4$

$$AB = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

距離は 5

2

内分点

2点 A(2, 3)、B(8, 15) を 1 : 2 に内分する点Pの座標を求めよ。

P の座標 $x = \underline{4}$ $y = \underline{7}$

$$m = 1, n = 2$$

$$x = \frac{2 \times 2 + 1 \times 8}{1 + 2} = \frac{4 + 8}{3} = \frac{12}{3} = 4, y = \frac{2 \times 3 + 1 \times 15}{1 + 2} = \frac{6 + 15}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

点Pの座標は (4, 7)

3

外分点

2点 A(1, 1)、B(4, 7) を 2 : 1 に外分する点Qの座標を求めよ。

Q の座標 $x = \underline{7}$ $y = \underline{13}$

$$m = 2, n = 1$$

$$x = \frac{-1 \times 1 + 2 \times 4}{2 - 1} = \frac{-1 + 8}{1} = 7, y = \frac{-1 \times 1 + 2 \times 7}{2 - 1} = \frac{-1 + 14}{1} = 13$$

点Qの座標は (7, 13)

4

三角形の重心

3点 A(1, 5)、B(4, -1)、C(7, 2) を頂点とする三角形の重心Gの座標を求めよ。

G の座標 $x = \underline{4}$ $y = \underline{2}$

$$x = \frac{1 + 4 + 7}{3} = \frac{12}{3} = 4, y = \frac{5 + (-1) + 2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

重心Gの座標は (4, 2)

5

傾きと1点を通る直線

傾き -2 、点 $(3, 1)$ を通る直線の方程式を $y = ax + b$ の形で求めよ。

$$a = \underline{-2} \quad b = \underline{7}$$

$$y - 1 = -2(x - 3)$$

$$y = -2x + 6 + 1$$

$$y = -2x + 7$$

6

2点を通る直線

2点 $(1, 2)$ 、 $(4, 11)$ を通る直線の方程式を $y = ax + b$ の形で求めよ。

$$a = \underline{3} \quad b = \underline{-1}$$

$$\text{傾き} = \frac{11 - 2}{4 - 1} = \frac{9}{3} = 3$$

$$y - 2 = 3(x - 1)$$

$$y = 3x - 1$$

7

垂直な直線

直線 $y = -2x + 4$ に垂直で、点 $(4, 3)$ を通る直線の方程式を $y = ax + b$ の形で求めよ。

$$a = \underline{1/2} \quad b = \underline{1}$$

垂直なので $-2 \times m = -1$ より $m = \frac{1}{2}$ 。

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 4)$$

$$y = \frac{1}{2}x - 2 + 3$$

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

8

点と直線の距離

点 $(1, -2)$ と直線 $3x - 4y + 2 = 0$ の距離を求めよ。

距離 $\underline{13/5}$

$$d = \frac{|3 \times 1 - 4 \times (-2) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|3 + 8 + 2|}{5} = \frac{13}{5}$$

$$\text{距離は } \frac{13}{5} (= 2.6)$$

9

標準形の読み取り

円 $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 49$ の中心の座標と半径を求めよ。

$$\text{中心 } x = \underline{-2} \quad y = \underline{5} \quad \text{半径 } r = \underline{7}$$

$(x + 2)^2 = (x - (-2))^2$ から中心の x 座標は -2 、 $(y - 5)^2$ から y 座標は 5 。 $49 = 7^2$ より半径は 7 。

中心 $(-2, 5)$ 、半径 7

10

一般形→標準形

円 $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ の中心の座標と半径を求めよ。

中心 $x = \underline{1}$ $y = \underline{-3}$ 半径 $r = \underline{3}$

$$x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$$

$$y^2 + 6y = (y + 3)^2 - 9$$

$$(x - 1)^2 - 1 + (y + 3)^2 - 9 + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$$

中心 (1, -3)、半径 3

11

円と直線の位置関係

円 $x^2 + y^2 = 8$ と直線 $x - y - 4 = 0$ の共有点の個数を求めよ。

共有点の個数 $\underline{1}$

中心 (0, 0)、半径 $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ 。

$$d = \frac{|0 - 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$d = r$ なので接する (共有点1個)。

共有点は1個

円 $x^2 + y^2 = 20$ 上の点 $(2, 4)$ における接線の方程式を $y = ax + b$ の形で求めよ。

$$a = \underline{-1/2} \quad b = \underline{5}$$

公式 $x_1x + y_1y = r^2$ に $(x_1, y_1) = (2, 4)$ を代入する。

$$2x + 4y = 20$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 5$$

$$a = -\frac{1}{2}, b = 5$$

2定点 $A(2, 5)$ 、 $B(6, -1)$ から等距離にある点Pの軌跡を、直線 $y = ax + b$ の形で求めよ。

$$a = \underline{2/3} \quad b = \underline{-2/3}$$

$P(x, y)$ とおく。条件は $PA = PB$ 、両辺2乗して $PA^2 = PB^2$ 。

$$PA^2 = (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = x^2 + y^2 - 4x - 10y + 29$$

$$PB^2 = (x - 6)^2 + (y + 1)^2 = x^2 + y^2 - 12x + 2y + 37$$

$$PA^2 = PB^2 \text{ より } -4x - 10y + 29 = -12x + 2y + 37$$

$$8x - 12y - 8 = 0、両辺を4で割って 2x - 3y - 2 = 0$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \quad (\text{線分ABの垂直二等分線})$$

2定点 $A(0, 0)$ 、 $B(8, 0)$ に対し、 $PA : PB = 1 : 3$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。中心の座標と半径を答えよ。

中心 (-1 , 0) 半径 3

$P(x, y)$ とおく。 $PA : PB = 1 : 3$ より $PB = 3PA$ 、両辺2乗して $PB^2 = 9PA^2$ 。

$$(x - 8)^2 + y^2 = 9(x^2 + y^2)$$

$$\text{展開して整理: } x^2 - 16x + 64 + y^2 = 9x^2 + 9y^2 \rightarrow -8x^2 - 16x + 64 - 8y^2 = 0$$

$$-8 \text{ で割って } x^2 + 2x - 8 + y^2 = 0、\text{平方完成して } (x + 1)^2 - 1 - 8 + y^2 = 0 \rightarrow (x + 1)^2 + y^2 = 9$$

中心 $(-1, 0)$ 、半径 3 の円

不等式 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 16$ の表す領域に、点 $(3, 5)$ は含まれるか。含まれるなら「○」、含まれないなら「×」を入力せよ。

×

$(3 + 1)^2 + (5 - 2)^2 = 16 + 9 = 25$ 。 $25 > 16$ なので不等式 (≤ 16) を満たさない。

× (含まれない)

16

対称点の逆算

点 $A(3, -2)$ を、点 B に関して対称移動した点が $C(9, 4)$ であるとき、点 B の座標を求めよ。

B の座標 $x = \underline{6}$ $y = \underline{1}$

「Bに関して対称」ということは、Bは線分ACの midpoint にあたる。

$$x = \frac{3+9}{2} = \frac{12}{2} = 6, y = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

点Bの座標は $(6, 1)$

2直線 $l_1: x + y - 4 = 0$ 、 $l_2: x - y - 2 = 0$ の交点と、点 $(0, 0)$ を通る直線の方程式を $y = ax + b$ の形で求めよ。

$$a = \underline{\underline{1/3}} \quad b = \underline{\underline{0}}$$

交点を通る直線は $(x + y - 4) + k(x - y - 2) = 0$ と表せる。

点 $(0, 0)$ を通るので代入すると

$$(0 + 0 - 4) + k(0 - 0 - 2) = 0 \rightarrow -4 - 2k = 0 \rightarrow k = -2$$

これを戻して整理する。

$$(x + y - 4) - 2(x - y - 2) = 0$$

$$x + y - 4 - 2x + 2y + 4 = 0$$

$$-x + 3y = 0$$

$$y = \frac{1}{3}x \quad (\text{検算: } l_1, l_2 \text{ の交点は連立方程式から } (3, 1) \text{ で、} y = \frac{1}{3} \times 3 = 1 \text{ と一致する})$$

18

円外の点から引いた2本の接線

点 $(0, 10)$ から円 $x^2 + y^2 = 25$ に引いた2本の接線の傾きを求めよ（コンマ区切りで両方入力）。

傾き $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

点 $(0, 10)$ を通る直線は $y = mx + 10$ (y 切片が10) とおける。これを $mx - y + 10 = 0$ の形にして、中心 $(0, 0)$ からの距離が半径 $r = 5$ に等しいとおく。

$$d = \frac{|10|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 5$$

$$\sqrt{m^2 + 1} = 2 \Rightarrow m^2 + 1 = 4 \Rightarrow m^2 = 3 \Rightarrow m = \pm\sqrt{3}$$

傾きは $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

19

2円の位置関係

円 $x^2 + y^2 = 16$ (中心 $(0, 0)$ 、半径 4) と円 $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$ (中心 $(3, 4)$ 、半径 1) について、中心間の距離 d と、共通接線の本数を求めよ。

$d =$ 5 共通接線の本数 3

中心間の距離 $d = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ 。 $r_1 + r_2 = 4 + 1 = 5$ なので $d = r_1 + r_2$ (外接)。

$d = 5$ 、共通接線は3本 (外接)

2定点 $A(0, 0)$ 、 $B(10, 0)$ に対し、 $PA^2 - PB^2 = 40$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。直線 $x =$ いくつになるか答えよ。

$$x = \underline{\quad 7 \quad}$$

$P(x, y)$ とおく。 $PA^2 = x^2 + y^2$ 、 $PB^2 = (x - 10)^2 + y^2$ 。

$$PA^2 - PB^2 = x^2 + y^2 - [(x - 10)^2 + y^2] = x^2 - (x^2 - 20x + 100) = 20x - 100$$

$$\text{これが40に等しいので } 20x - 100 = 40 \rightarrow 20x = 140 \rightarrow x = 7$$

(y は式に現れないので、軌跡は y がすべての実数を取り得る直線になる。「距離の2乗の差が一定」なら直線、「和が一定」なら円になることに注目。)

軌跡は直線 $x = 7$

連立不等式 $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ 、 $x + 3y \leq 12$ 、 $3x + y \leq 12$ の表す領域において、 $x + y$ の最大値と最小値を求めよ。

最大値 6 最小値 0

まず領域の頂点をすべて求める。

$x + 3y = 12$ と $y = 0$ の交点： $(12, 0)$ 。ただし $3x + y = 36 + 0 = 36 > 12$ を満たさないなので、この点は領域の頂点ではない。

$3x + y = 12$ と $y = 0$ の交点： $(4, 0)$ 。 $x + 3y = 4 \leq 12$ を満たすのでOK。

$x + 3y = 12$ と $3x + y = 12$ の交点： $y = 12 - 3x$ を代入して $x + 3(12 - 3x) = 12 \rightarrow x + 36 - 9x = 12 \rightarrow -8x = -24 \rightarrow x = 3, y = 3$ 。交点 $(3, 3)$ 。
。

$x + 3y = 12$ と $x = 0$ の交点： $(0, 4)$ 。 $3x + y = 0 + 4 = 4 \leq 12$ を満たすのでOK。

以上より頂点は $(0, 0)$ 、 $(4, 0)$ 、 $(3, 3)$ 、 $(0, 4)$ 。それぞれで $x + y$ の値を計算すると

$(0, 0) \rightarrow 0$ $(4, 0) \rightarrow 4$ $(3, 3) \rightarrow 6$ $(0, 4) \rightarrow 4$

$x = 3, y = 3$ のとき最大値 6、 $x = 0, y = 0$ のとき最小値 0

三角形の頂点 $A(0, 0)$ 、 $B(6, 2)$ 、 $C(2, 8)$ について、辺ABを底辺としたときの高さ h （点Cと直線ABの距離）と、三角形の面積 S を求めよ。

$$h = \underline{\underline{11\sqrt{10}/5}} \quad S = \underline{\underline{22}}$$

直線ABは、2点 $A(0, 0)$ 、 $B(6, 2)$ を通るので傾き $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 、原点を通るので $y = \frac{1}{3}x$ 、一般形は $x - 3y = 0$ 。

$$h = \frac{|1 \times 2 - 3 \times 8|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|2 - 24|}{\sqrt{10}} = \frac{22}{\sqrt{10}} = \frac{22\sqrt{10}}{10} = \frac{11\sqrt{10}}{5}$$

底辺ABの長さは $\sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ （三平方の定理）。

$$S = \frac{1}{2} \times \text{底辺} \times h = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times \frac{11\sqrt{10}}{5} = \frac{1}{2} \times \frac{22 \times 10}{5} = \frac{1}{2} \times 44$$

$$\text{高さ } h = \frac{11\sqrt{10}}{5}、\text{面積 } S = 22$$

直線 $y = 2x + k$ が円 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ に接するとき、 k の値を求めよ（コンマ区切りで両方入力）。

$$k = \underline{\underline{5,-5}}$$

直線を $2x - y + k = 0$ にする。中心 $(1, 2)$ からの距離が半径 $r = \sqrt{5}$ に等しいとおく。

$$d = \frac{|2 \times 1 - 2 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$|k| = \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$$

$$k = 5, -5$$

2定点 $A(0, 0)$ 、 $B(6, 0)$ に対し、 $PA : PB = 2 : 1$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。さらに、この軌跡上の点のうち、点 $C(20, 0)$ からの距離が最大となる点の座標と、そのときの距離を求めよ。

軌跡の中心 (8 , 0) 半径 4 最大となる点 (4 , 0) 距離 16

【軌跡】 $P(x, y)$ とおく。 $PA : PB = 2 : 1$ より $PA = 2PB$ 、両辺2乗して $PA^2 = 4PB^2$ 。

$$x^2 + y^2 = 4[(x - 6)^2 + y^2]$$

$$\text{右辺展開：} 4(x^2 - 12x + 36 + y^2) = 4x^2 - 48x + 144 + 4y^2$$

$$\text{移項して整理：} x^2 + y^2 - 4x^2 + 48x - 144 - 4y^2 = 0 \rightarrow -3x^2 + 48x - 3y^2 - 144 = 0$$

$$-3 \text{ で割って } x^2 - 16x + 48 + y^2 = 0. \text{ 平方完成して } (x - 8)^2 - 64 + 48 + y^2 = 0 \rightarrow (x - 8)^2 + y^2 = 16$$

軌跡は中心 $(8, 0)$ 、半径 4 の円。

【原点からではなくCからの最大距離】 円の中心 $O'(8, 0)$ から点 $C(20, 0)$ までの距離は $20 - 8 = 12$ 。円周上の点でCから最も遠いのは、 $C \cdot \text{中心} \cdot \text{その点}$ が一直線上に並び、中心よりさらに遠い側にある点。中心から見てCと反対方向 (x 軸負の方向) に半径分だけ進んだ点だから、

その点は $(8 - 4, 0) = (4, 0)$ 。距離は $O'C + r = 12 + 4 = 16$ 。

(検算： $(4 - 8)^2 + 0^2 = 16$ で確かに円上の点になっている。)

軌跡は中心 $(8, 0)$ 、半径 4 の円。点Cから最も遠い点は $(4, 0)$ 、そのときの距離は 16

2定点 $A(0, 0)$ 、 $B(0, 8)$ に対し、 $PA : PB = 1 : 3$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。また、その軌跡と直線 $y = x + 2$ の共有点の個数を求めよ。

軌跡の中心 (0 , -1) 半径 3 共有点の個数 2

【軌跡】 $P(x, y)$ とおく。 $PA : PB = 1 : 3$ より $PB = 3PA$ 、両辺2乗して $PB^2 = 9PA^2$ 。

$$PA^2 = x^2 + y^2, PB^2 = x^2 + (y - 8)^2$$

$$x^2 + (y - 8)^2 = 9(x^2 + y^2)$$

$$\text{左辺展開：} x^2 + y^2 - 16y + 64$$

$$\text{右辺展開：} 9x^2 + 9y^2$$

$$\text{左辺} - \text{右辺} = 0 : x^2 + y^2 - 16y + 64 - 9x^2 - 9y^2 = 0 \rightarrow -8x^2 - 8y^2 - 16y + 64 = 0$$

$$-8 \text{ で割って } x^2 + y^2 + 2y - 8 = 0。y \text{ について平方完成：} x^2 + (y + 1)^2 - 1 - 8 = 0 \rightarrow x^2 + (y + 1)^2 = 9$$

軌跡は中心 $(0, -1)$ 、半径 3 の円。

【円と直線の共有点】直線 $y = x + 2$ を一般形にすると $x - y + 2 = 0$ 。中心 $(0, -1)$ からこの直線までの距離を求める。

$$d = \frac{|0 - (-1) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2.12 < 3 = r \text{ なので、直線は円と2点で交わる。}$$

軌跡は中心 $(0, -1)$ 、半径 3 の円。直線 $y = x + 2$ との共有点は2個

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1

点に座標を与えることで、内分点・重心・対称点のような「点の位置」の性質から、線分の垂直二等分線、円の方程式までもが、同じ「2点間の距離」という1つの考え方の上に統一的に扱えるようになる。2点 $A(1, 1)$ 、 $B(9, 7)$ を例にとり、(1)距離 AB 、(2)線分 AB の垂直二等分線の方程式、(3) A を中心とし B を通る円の方程式、の3つが、それぞれどのように「距離」という同じ考え方から導かれるかを説明せよ。

(1) 距離 AB は、2点間の距離の公式にそのまま代入すれば求まる。

$$AB = \sqrt{(9-1)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

(2) 垂直二等分線とは「 A と B から等しい距離にある点 $P(x, y)$ の集まり」のことである。つまり条件は $PA = PB$ であり、これは距離の公式を2回使って等式を作ることに他ならない。両辺を2乗すると

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-9)^2 + (y-7)^2$$

を整理すればよい。左辺を展開すると $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1$ 、右辺を展開すると $x^2 - 18x + 81 + y^2 - 14y + 49$ となり、左辺から右辺を引いて整理すると

$$16x + 12y - 128 = 0$$

$$4x + 3y - 32 = 0$$

すなわち $y = -\frac{4}{3}x + \frac{32}{3}$ となる（これは中点 $(5, 4)$ を通り、 AB の傾き $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ の逆数の符号違い $-\frac{4}{3}$ を傾きにもつ直線であり、傾きだけで作った場合と一致する）。

(3) A を中心とし B を通る円は「中心 A から円周までの距離が常に一定」という円の定義そのものであり、その一定の距離とは、円周上の点である B までの距離、つまり(1)で求めた $AB = 10$ である。よって半径は10であり、円の方程式は

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 100$$

このように、(1)は距離の公式を1回使うだけ、(2)は距離の公式を2回使って等式($PA=PB$)を作る、(3)は距離の公式で求めた値をそのまま半径として使う——という違いはあっても、根っこにあるのは常に同じ「2点間の距離の公式」である。

距離AB= 10。垂直二等分線は $y = -\frac{4}{3}x + \frac{32}{3}$ 。Aを中心としBを通る円は $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 100$ 。いずれも2点間の距離の公式を土台にしている。

記2 2定点 A(2, 3)、B(8, 11) を結ぶ線分ABの垂直二等分線の方程式を求めよ。さらに、この直線が円 $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 20$ から切り取る弦の長さを、中心・弦の中点・弦の端点でできる直角三角形に三平方の定理を使って求めよ。

まず垂直二等分線を求める。線分ABの中点は

$$\left(\frac{2+8}{2}, \frac{3+11}{2} \right) = (5, 7)$$

ABの傾きは $\frac{11-3}{8-2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ なので、垂直な傾きは $-\frac{3}{4}$ 。

中点(5, 7)を通り傾き $-\frac{3}{4}$ の直線は

$$y - 7 = -\frac{3}{4}(x - 5)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4} + 7 = -\frac{3}{4}x + \frac{43}{4}$$

両辺を4倍して整理すると、一般形は $3x + 4y - 43 = 0$ 。

次に、この直線が円 $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 20$ (中心C(5, 2)、半径 $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$) から切り取る弦の長さを求める。まず中心Cと直線の距離 d を求める。

$$d = \frac{|3 \times 5 + 4 \times 2 - 43|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|15 + 8 - 43|}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

弦の両端をP, Qとし、弦の中点をMとすると、CMは弦に垂直（円の中心から弦へ引いた垂線は弦を2等分する）なので、 $\triangle CMP$ は $\angle M = 90^\circ$ の直角三角形になる。斜辺CPは半径 r 、1辺CMは中心と直線の距離 d だから、三平方の定理より

$$MP^2 = CP^2 - CM^2 = r^2 - d^2 = 20 - 16 = 4$$

$$MP = \sqrt{4} = 2$$

弦の長さPQはMPの2倍（Mは弦の中点なので）だから

$$PQ = 2 \times MP = 2 \times 2 = 4$$

垂直二等分線は $y = -\frac{3}{4}x + \frac{43}{4}$ ($3x + 4y - 43 = 0$)。円から切り取る弦の長さは 4。

EXAM

共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 8分／配点 20点

花子さんの住む町内会では、2つの避難所 A(1, 4)、B(5, 6) (座標の単位はkm) から等しい距離にある地点に、新しい掲示板を設置する計画を立てている。さらに、避難所Aを中心とした半径5kmの範囲には、災害時の警戒区域が設定されている。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

花子「掲示板の位置Pは、AとBから等しい距離にある地点の集まり、つまり軌跡の上にあるようにしたいです。」

太郎「 $P(x, y)$ とにおいて、 $PA = PB$ の条件をそのまま式にしてみよう。」

(1) $PA^2 = PB^2$ の関係から、この軌跡の方程式を求めると

$$y = \boxed{\text{ア}}x + \boxed{\text{イウ}}$$

となる ($\boxed{\text{ア}}$ は符号もつけて入力)。

ア -2 イウ 11

$P(x, y)$ とおく。 $PA^2 = (x - 1)^2 + (y - 4)^2$ 、 $PB^2 = (x - 5)^2 + (y - 6)^2$ 。
。

PA^2 を展開： $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + y^2 - 2x - 8y + 17$

PB^2 を展開： $x^2 - 10x + 25 + y^2 - 12y + 36 = x^2 + y^2 - 10x - 12y + 61$

$PA^2 = PB^2$ より $-2x - 8y + 17 = -10x - 12y + 61$

$$8x + 4y - 44 = 0、両辺を4で割って $2x + y - 11 = 0$$$

$$y = -2x + 11$$

(2)

太郎「この掲示板の位置は、Aを中心とする半径5kmの警戒区域の境界線（円）と交わるところに立てたら目立ちそうだね。」

(1)で求めた直線と、円 $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$ の共有点の個数を求めよ。

共有点の個数 2 個

円の中心 $(1, 4)$ 、半径 5。直線 $2x + y - 11 = 0$ ($a = 2, b = 1, c = -11$) からこの中心までの距離を求める。

$$d = \frac{|2 \times 1 + 1 \times 4 - 11|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2 + 4 - 11|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$\sqrt{5} \approx 2.24 < 5 = r$ なので、直線は円と2点で交わる。

共有点は2個

(3)

(2)の共有点の座標を、 x 座標が小さい方から順に求めよ。1つ目の点 (オ, カ)、2つ目の点 (キ, ク)。

オ 1 カ 9 キ 5 ク 1

(1)の $y = -2x + 11$ を、円 $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$ に代入する。

$$(x - 1)^2 + (-2x + 11 - 4)^2 = 25$$

$$(x - 1)^2 + (-2x + 7)^2 = 25$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (4x^2 - 28x + 49) = 25$$

$$5x^2 - 30x + 50 = 25$$

$$5x^2 - 30x + 25 = 0、両辺を5で割って $x^2 - 6x + 5 = 0$$$

$$(x-1)(x-5)=0 \text{ より } x=1 \text{ または } x=5$$

$$x=1 \text{ のとき } y=-2 \times 1+11=9$$

$$x=5 \text{ のとき } y=-2 \times 5+11=1$$

共有点の座標は $(1, 9)$ と $(5, 1)$

大問2 目標時間 8分/配点 20点

花子さんの学校の文化祭では、クッキーとマフィンの2種類のお菓子を作って販売する。クッキー1個には小麦粉1（単位）とバター2（単位）を、マフィン1個には小麦粉2（単位）とバター1（単位）を使う。用意できる材料は、小麦粉が10単位、バターが8単位までである。クッキーを x 個、マフィンを y 個作るとする（ $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ ）。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「材料の使用量から、 x 、 y が満たす連立不等式を作ってみよう。」

花子「小麦粉とバター、それぞれの合計使用量が上限を超えないようにすればいいですね。」

(1) 材料の制約から、 x 、 y が満たすべき連立不等式は、 $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ に加えて

$$x + \boxed{\text{ア}}y \leq \boxed{\text{イウ}} \text{ (小麦粉)、 } \boxed{\text{エ}}x + y \leq \boxed{\text{オ}} \text{ (バター)}$$

である。

ア 2 イウ 10 エ 2 オ 8

小麦粉の合計使用量は、クッキー x 個で $1 \times x$ 、マフィン y 個で $2 \times y$ なので、合計 $x + 2y$ 。これが上限10以下だから $x + 2y \leq 10$ 。

バターの合計使用量は、クッキー x 個で $2 \times x$ 、マフィン y 個で $1 \times y$ なので、合計 $2x + y$ 。これが上限8以下だから $2x + y \leq 8$ 。

$$x + 2y \leq 10 \text{ (小麦粉)、 } 2x + y \leq 8 \text{ (バター)}$$

(2)

クッキー1個の利益は300円、マフィン1個の利益は400円である。利益の合計を S 円とするとき、この領域で S を最大にする x, y の値と、そのときの S の値を求めよ。

$$x = \underline{2} \quad y = \underline{4} \quad S = \underline{2200}$$

領域の頂点をすべて求める。

$2x + y = 8$ と $y = 0$ の交点 : $(4, 0)$ 。 $x + 2y = 4 \leq 10$ を満たすのでOK。

$x + 2y = 10$ と $x = 0$ の交点 : $(0, 5)$ 。 $2x + y = 5 \leq 8$ を満たすのでOK。

$x + 2y = 10$ と $2x + y = 8$ の交点 : $y = 8 - 2x$ を代入して $x + 2(8 - 2x) = 10 \rightarrow x + 16 - 4x = 10 \rightarrow -3x = -6 \rightarrow x = 2, y = 4$ 。交点 $(2, 4)$ 。

頂点は $(0, 0), (4, 0), (2, 4), (0, 5)$ 。利益 $S = 300x + 400y$ をそれぞれで計算すると

$$(0, 0) \rightarrow 0 \quad (4, 0) \rightarrow 1200 \quad (2, 4) \rightarrow 600 + 1600 = 2200 \quad (0, 5) \rightarrow 0 + 2000 = 2000$$

最大は $(2, 4)$ のときの 2200円。

$x = 2, y = 4$ のとき利益は最大値 2200円

(3)

先生「実は材料費の見直しで、クッキー1個の利益が300円から200円に変わりました。マフィンの利益400円は変わりません。」

この場合の利益 S' の最大値を求めよ。

S' の最大値 2000

(2)で求めた4つの頂点 $(0, 0), (4, 0), (2, 4), (0, 5)$ は変わらない。新しい利益 $S' = 200x + 400y$ をそれぞれで計算する。

$$(0, 0) \rightarrow 0 \quad (4, 0) \rightarrow 800 \quad (2, 4) \rightarrow 400 + 1600 = 2000 \quad (0, 5) \rightarrow 0 + 2000 = 2000$$

$(2, 4)$ と $(0, 5)$ の2つの頂点で、ともに2000円という同じ値になった。これは偶然ではない。目的の式 $200x + 400y = k$ を直線とみると傾きは $-\frac{1}{2}$ であり、これは頂点 $(2, 4)$ と $(0, 5)$ を結ぶ境界線の傾き $\frac{5-4}{0-2} = -\frac{1}{2}$ とちょうど一致している。目的の直線が領域の境界線の1辺とぴったり平行になったため、その辺上のどの点でも同じ最大値をとる。

利益 S' の最大値は 2000円 ($(x, y) = (2, 4)$ と $(0, 5)$ のどちらでも実現する)