

三角方程式・不等式

解答（全21問）

氏名 _____

得点 _____ / 21点

DRILL

練習問題（全16問）

基本（1～6）

1

基本の方程式（sin）

$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を満たす θ をすべて求めよ。

$\theta = \underline{\pi/3, 2\pi/3}$

単位円でy座標が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ になる点は、第1象限に $\theta = \frac{\pi}{3}$ 、第2象限にその折り返し $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ 。

$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

2

基本の方程式 (cos)

$\cos \theta = -\frac{1}{2}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を満たす θ をすべて求めよ。

$$\theta = \underline{2\pi/3, 4\pi/3}$$

基準角は $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ 。x座標が負なので第2・第3象限。

第2象限： $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ 第3象限： $\theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$$\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

3

基本の方程式 (tan)

$\tan \theta = 1$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を満たす θ をすべて求めよ。

$$\theta = \underline{\pi/4, 5\pi/4}$$

$\tan \theta = 1$ の基本の角は $\theta = \frac{\pi}{4}$ 。 $\tan$ の周期は π なので、 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲にはもう1つ $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ がある。

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

4

基本の不等式 (sin>)

$\sin \theta > \frac{1}{2}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を満たす θ の範囲を求めよ。

$$\underline{\pi/6} < \theta < \underline{5\pi/6}$$

境界： $\sin \theta = \frac{1}{2}$ より $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ 。

代表点 $\theta = \frac{\pi}{2}$ を代入すると $\sin \frac{\pi}{2} = 1 > \frac{1}{2}$ で成り立つので、境界の間が解。

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$$

5

基本の不等式 ($\cos < \text{負の値}$)

$\cos \theta < -\frac{1}{2}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を満たす θ の範囲を求めよ。

$$\underline{\frac{2\pi}{3}} < \theta < \underline{\frac{4\pi}{3}}$$

境界: $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ より $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ 。

代表点 $\theta = \pi$ を代入すると $\cos \pi = -1 < -\frac{1}{2}$ で成り立つので、境界の間が解。

$$\frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{4\pi}{3}$$

6

基本の不等式 ($\sin \geq \cdot$ 境界を含む)

$\sin \theta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を満たす θ の範囲を求めよ。

$$\underline{\frac{\pi}{4}} \leq \theta \leq \underline{\frac{3\pi}{4}}$$

境界: $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ より $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ 。

代表点 $\theta = \frac{\pi}{2}$ を代入すると $\sin \frac{\pi}{2} = 1 \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ で成り立つので、境界の間が解。不等号に等号があるので境界も含める。

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$$

$\cos 2\theta + \sin \theta = 0$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を満たす θ をすべて求めよ。小さい順にコンマ区切りで入力せよ。

$$\theta = \underline{\pi/2, 7\pi/6, 11\pi/6}$$

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$ を代入する。

$$1 - 2\sin^2 \theta + \sin \theta = 0$$

$$-2\sin^2 \theta + \sin \theta + 1 = 0$$

$$\text{両辺に } -1 \text{ をかけて } 2\sin^2 \theta - \sin \theta - 1 = 0$$

$$(2\sin \theta + 1)(\sin \theta - 1) = 0$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{2} \text{ または } \sin \theta = 1 \text{ (どちらも } -1 \leq t \leq 1 \text{ に収まるので有効)}$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{2} \text{ (} 0 \leq \theta < 2\pi \text{) を満たすのは } \theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$\sin \theta = 1 \text{ を満たすのは } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta = 1$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を満たす θ をすべて求めよ。

$$\theta = \underline{\pi/2, 7\pi/6}$$

$a = 1$ 、 $b = -\sqrt{3}$ より $r = \sqrt{1+3} = 2$ 、 $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ 、 $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ より $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ 。

$$2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) = 1 \quad \text{より} \quad \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \theta - \frac{\pi}{3} \text{ とおく。 } 0 \leq \theta < 2\pi \text{ より } -\frac{\pi}{3} \leq \varphi < \frac{5\pi}{3}$$

この範囲で $\sin \varphi = \frac{1}{2}$ を満たすのは $\varphi = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

$$\theta = \varphi + \frac{\pi}{3} \text{ で戻すと、 } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}$$

$\cos \theta > \frac{1}{2}$ ($-\pi < \theta \leq \pi$) を満たす θ の範囲を求めよ。

$$\underline{-\pi/3} < \theta < \underline{\pi/3}$$

境界： $\cos \theta = \frac{1}{2}$ を $-\pi < \theta \leq \pi$ の範囲で解くと $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$ 。

代表点 $\theta = 0$ を代入すると $\cos 0 = 1 > \frac{1}{2}$ で成り立つ。 $\theta = 0$ は境界 $-\frac{\pi}{3}$ と $\frac{\pi}{3}$ の間にあるので、その間が解。

$-\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3}$ (範囲を $0 \leq \theta < 2\pi$ のままにすると解が0の両側に分かれてしまうが、 $-\pi < \theta \leq \pi$ のように原点をまたぐ範囲にすると1本の区間でまとまる)

$\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta > 1$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を満たす θ の範囲を求めよ。

$$\underline{\pi/3} < \theta < \underline{\pi}$$

$$a = \sqrt{3}, b = -1 \text{ より } r = 2, \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\alpha = -\frac{1}{2} \text{ より } \alpha = -\frac{\pi}{6}。$$

$$2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) > 1 \text{ より } \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \theta - \frac{\pi}{6} \text{ とおく。 } 0 \leq \theta < 2\pi \text{ より } -\frac{\pi}{6} \leq \varphi < \frac{11\pi}{6}$$

この範囲で $\sin\varphi > \frac{1}{2}$ となるのは $\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{5\pi}{6}$ (境界の外側の φ では $\sin\varphi \leq \frac{1}{2}$ になるので、この1本の区間だけが解)

$$\theta = \varphi + \frac{\pi}{6} \text{ で戻すと } \frac{\pi}{3} < \theta < \pi$$

$$\frac{\pi}{3} < \theta < \pi$$

$\cos 2\theta + \cos \theta = 0$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を満たす θ をすべて求めよ。小さい順にコンマ区切りで入力せよ。

$$\theta = \underline{\pi/3, \pi, 5\pi/3}$$

$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ を代入する。

$$2\cos^2 \theta - 1 + \cos \theta = 0$$

$$2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0$$

$$(2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) = 0$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \text{ または } \cos \theta = -1 \text{ (どちらも } -1 \leq t \leq 1 \text{ に収まるので有効)}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \text{ (} 0 \leq \theta < 2\pi \text{) を満たすのは } \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

$$\cos \theta = -1 \text{ を満たすのは } \theta = \pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$$

12

合成を使う方程式（右辺が負）

$\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = -1$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を満たす θ をすべて求めよ。

$$\theta = \underline{5\pi/6, 3\pi/2}$$

$$a = 1, b = \sqrt{3} \text{ より } r = 2, \cos \alpha = \frac{1}{2}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ より } \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

$$2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) = -1 \text{ より } \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$\varphi = \theta + \frac{\pi}{3} \text{ とおく。 } 0 \leq \theta < 2\pi \text{ より } \frac{\pi}{3} \leq \varphi < \frac{7\pi}{3}$$

$$\text{この範囲で } \sin \varphi = -\frac{1}{2} \text{ を満たすのは } \varphi = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$\theta = \varphi - \frac{\pi}{3} \text{ で戻すと、 } \varphi = \frac{7\pi}{6} \text{ のとき } \theta = \frac{5\pi}{6}, \varphi = \frac{11\pi}{6} \text{ のとき } \theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$$

13

因数分解を使う不等式

$\sin 2\theta > \sin \theta$ ($0 < \theta < \pi$) を満たす θ の範囲を求めよ。

$$\underline{0} < \theta < \underline{\pi/3}$$

$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ を使って移項する。

$$2 \sin \theta \cos \theta - \sin \theta > 0$$

$$\sin \theta (2 \cos \theta - 1) > 0$$

$0 < \theta < \pi$ の範囲では $\sin \theta > 0$ が常に成り立つので、不等式全体の符号は $(2 \cos \theta - 1)$ の符号だけで決まる。

$$2 \cos \theta - 1 > 0 \text{ より } \cos \theta > \frac{1}{2}, \text{ これを } 0 < \theta < \pi \text{ の範囲で解くと } 0 < \theta < \frac{\pi}{3}.$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$$

14

範囲が2つに分かれる不等式 ($\theta=0$ またぎ)

$2\cos\theta - 1 > 0$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を満たす θ の範囲を求めよ。下のように2つの区間に分けて答えよ。

$$0 \leq \theta < \underline{\pi/3} \quad \text{または} \quad \underline{5\pi/3} < \theta < 2\pi$$

$\cos\theta > \frac{1}{2}$ の形に直す。境界： $\cos\theta = \frac{1}{2}$ より $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ 。

代表点 $\theta = 0$ を代入すると $\cos 0 = 1 > \frac{1}{2}$ で成り立つ。 $\theta = 0$ を含む側の弧が解なので、0 の周り ($\frac{\pi}{3}$ より手前と $\frac{5\pi}{3}$ より奥) が解になる。 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲でそのまま書こうとすると、解が $\theta = 0$ の両側にまたがってしまうので、2つの区間に分けて書く。

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{3} \quad \text{または} \quad \frac{5\pi}{3} < \theta < 2\pi$$

$2\sin^2\theta + \cos\theta - 2 = 0$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を満たす θ をすべて求めよ。小さい順にコンマ区切りで入力せよ。

$$\theta = \underline{\pi/3, \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/3}$$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ を代入して $\cos\theta$ だけの式にする。

$$2(1 - \cos^2\theta) + \cos\theta - 2 = 0$$

$$2 - 2\cos^2\theta + \cos\theta - 2 = 0$$

$$-2\cos^2\theta + \cos\theta = 0$$

$$\cos\theta(-2\cos\theta + 1) = 0$$

$$\cos\theta = 0 \text{ または } \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta = 0 \text{ } (0 \leq \theta < 2\pi) \text{ を満たすのは } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \text{ を満たすのは } \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

小さい順に並べると

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$$

$\cos \theta - \sin \theta = -1$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を満たす θ をすべて求めよ。

$$\theta = \underline{\pi/2, \pi}$$

$\sin \theta$ の係数 $a = -1$ 、 $\cos \theta$ の係数 $b = 1$ より $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ 、 $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 、 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (第2象限) より $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ 。

$$\sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{3\pi}{4} \right) = -1 \quad \text{より} \quad \sin \left(\theta + \frac{3\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi = \theta + \frac{3\pi}{4} \text{ とおく。 } 0 \leq \theta < 2\pi \text{ より } \frac{3\pi}{4} \leq \varphi < \frac{11\pi}{4}$$

この範囲で $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ を満たすのは $\varphi = \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

$$\theta = \varphi - \frac{3\pi}{4} \text{ で戻すと、 } \varphi = \frac{5\pi}{4} \text{ のとき } \theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = \frac{7\pi}{4} \text{ のとき } \theta = \pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \pi$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。解の個数を数える問題と、合成 $\times$ 不等式の組み合わせで、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

解の個数（定数 a との交点）

方程式 $\sin \theta = a$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) が異なる2つの実数解をもつような、定数 a の値の範囲を求めよ。

$$\underline{-1} < a < \underline{1}$$

$y = \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) のグラフと、横の直線 $y = a$ の交点の個数を考える。

$a = 1$ のとき：交点は $\theta = \frac{\pi}{2}$ の1つだけ（山の頂点にちょうど接する）。

$a = -1$ のとき：交点は $\theta = \frac{3\pi}{2}$ の1つだけ（谷の底にちょうど接する）。

$-1 < a < 1$ のとき：直線はグラフの山（または谷）の途中を横切るので、交点はつねに2つ（ $a = 0$ のときも $\theta = 0, \pi$ の2つになる）。

$|a| > 1$ のとき：直線がグラフの範囲（ $-1 \leq y \leq 1$ ）の外なので交点なし。

$$-1 < a < 1$$

方程式 $\cos \theta = a$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) がただ1つの実数解をもつような、定数 a の値の範囲を求めよ。

$$\underline{-1} \leq a \leq \underline{1}$$

$y = \cos \theta$ は $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で 1 から -1 までずっと減少し続ける（山や谷を作らない、単調に減るだけのグラフ）。

このように増減が1方向しかないグラフでは、横の直線 $y = a$ との交点は「1本の坂」に対して多くても1つしかできない。したがって $-1 \leq a \leq 1$ の範囲であれば、その値に対応する θ がただ1つに決まる ($|a| > 1$ なら交点はなく解なし)。

応1のように「山」や「谷」を含む範囲では交点が2つできることがあるが、この問題のように単調に増減するだけの範囲を選べば、交点は必ず1つになる。

$$-1 \leq a \leq 1$$

$\sin \theta + \cos \theta \geq 1$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) を満たす θ の範囲を求めよ。

$$\underline{0} \leq \theta \leq \underline{\pi/2}$$

$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$ なので、不等式は

$$\sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \geq 1 \quad \text{つまり} \quad \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi = \theta + \frac{\pi}{4} \text{ とおく。 } 0 \leq \theta \leq \pi \text{ より } \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$$

この範囲で $\sin \varphi \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ となるのは $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$ (φ が $\frac{3\pi}{4}$ を超えると $\sin \varphi$ は $\frac{\sqrt{2}}{2}$ を下回り、その後 $\frac{5\pi}{4}$ まで戻ってこない)

$$\theta = \varphi - \frac{\pi}{4} \text{ で戻すと } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$2\sin\theta + 2\sqrt{3}\cos\theta \leq 2$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を満たす θ の範囲を求めよ。

$$\underline{\frac{\pi}{2}} \leq \theta \leq \underline{\frac{11\pi}{6}}$$

$a = 2$ 、 $b = 2\sqrt{3}$ より $r = \sqrt{4 + 12} = 4$ 、 $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ 、 $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 。
。

$$4\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \leq 2 \quad \text{より} \quad \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \theta + \frac{\pi}{3} \text{ とおく。} 0 \leq \theta < 2\pi \text{ より } \frac{\pi}{3} \leq \varphi < \frac{7\pi}{3}$$

この範囲で $\sin\varphi > \frac{1}{2}$ （不等式を満たさない側）となるのは $\frac{\pi}{3} \leq \varphi < \frac{5\pi}{6}$ と $\frac{13\pi}{6} < \varphi < \frac{7\pi}{3}$ の2か所（範囲の両端にまたがる形で分かれている）。残りの $\frac{5\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{13\pi}{6}$ が $\sin\varphi \leq \frac{1}{2}$ を満たす部分で、こちらは1本につながっている。

$$\theta = \varphi - \frac{\pi}{3} \text{ で戻すと } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{11\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{11\pi}{6}$$

方程式 $2\sin\theta + 2\sqrt{3}\cos\theta = a$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) が異なる2つの実数解をもつような、定数 a の値の範囲を求めよ。

$$\underline{-4} < a < \underline{4}$$

応4と同じ合成を使うと $2\sin\theta + 2\sqrt{3}\cos\theta = 4\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ 。

$$\text{方程式は } 4\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = a \quad \text{つまり} \quad \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{a}{4}$$

$\varphi = \theta + \frac{\pi}{3}$ は θ が $0 \leq \theta < 2\pi$ を動くとき、幅がちょうど 2π （1周期分）の範囲を動く。応1で確認したとおり、 $\sin\varphi = k$ の形の方程式は、 k がグラフの山・谷の頂点の値（ ± 1 ）にちょうど一致するときだけ解が1つになり、それ以外の $-1 < k < 1$ では（範囲の取り方によらず）つねに解が2つになる。

したがって解が2つになるのは $-1 < \frac{a}{4} < 1$ のとき。両辺に4をかけて

$$-4 < a < 4$$