

2倍角・半角・三角関数の合成

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ /23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～6）

1

2倍角の値

$\sin \theta = \frac{1}{2}$ 、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\sin 2\theta$ 、 $\cos 2\theta$ を求めよ。

$\sin 2\theta = \underline{\sqrt{3}/2}$ $\cos 2\theta = \underline{1/2}$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ なので } \cos \theta > 0. \cos \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2\theta = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 2\theta = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 2\theta = \frac{1}{2}$$

2

2倍角の値・ $\cos \theta$ から出発

$\cos \theta = \frac{3}{5}$ 、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\sin 2\theta$ 、 $\cos 2\theta$ を求めよ。

$$\sin 2\theta = \underline{\underline{24/25}} \quad \cos 2\theta = \underline{\underline{-7/25}}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \quad (\theta \text{ は第1象限で正})$$

$$\sin 2\theta = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25} \quad \cos 2\theta = 2 \cdot \frac{9}{25} - 1 = -\frac{7}{25}$$

$$\sin 2\theta = \frac{24}{25}、\cos 2\theta = -\frac{7}{25}$$

3

2倍角の値・第2象限

$\sin \theta = \frac{1}{3}$ 、 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき、 $\sin 2\theta$ 、 $\cos 2\theta$ を求めよ。

$$\sin 2\theta = \underline{\underline{-4\sqrt{2}/9}} \quad \cos 2\theta = \underline{\underline{7/9}}$$

$$\text{第2象限なので } \cos \theta < 0. \cos \theta = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin 2\theta = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9} \quad \cos 2\theta = 1 - 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$

$$\sin 2\theta = -\frac{4\sqrt{2}}{9}、\cos 2\theta = \frac{7}{9}$$

4

tan θ から2倍角

$\tan \theta = \frac{3}{4}$ 、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\sin 2\theta$ 、 $\cos 2\theta$ 、 $\tan 2\theta$ を求めよ。

$$\sin 2\theta = \underline{\frac{24}{25}} \quad \cos 2\theta = \underline{\frac{7}{25}} \quad \tan 2\theta = \underline{\frac{24}{7}}$$

$\tan \theta = \frac{3}{4}$ より直角三角形の対辺3・隣辺4・斜辺5と考えて $\sin \theta = \frac{3}{5}$ 、 $\cos \theta = \frac{4}{5}$

$$\sin 2\theta = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25} \quad \cos 2\theta = 1 - 2 \cdot \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{7} = \frac{24}{7}$$

$$\sin 2\theta = \frac{24}{25}、\cos 2\theta = \frac{7}{25}、\tan 2\theta = \frac{24}{7}$$

5

半角の値（確認しやすい角）

$\cos \theta = \frac{1}{2}$ 、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\sin \frac{\theta}{2}$ 、 $\cos \frac{\theta}{2}$ を求めよ。

$$\sin \frac{\theta}{2} = \underline{\frac{1}{2}} \quad \cos \frac{\theta}{2} = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$ なので $\sin \frac{\theta}{2}$ 、 $\cos \frac{\theta}{2}$ はどちらも正。

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{よって} \quad \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4} \quad \text{よって} \quad \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}、\cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\theta = \frac{\pi}{3} \text{ なので } \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6} \text{ の値と一致する})$$

$\cos \theta = \frac{7}{9}$ 、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\sin \frac{\theta}{2}$ 、 $\cos \frac{\theta}{2}$ を求めよ。

$$\sin \frac{\theta}{2} = \underline{\frac{1}{3}} \quad \cos \frac{\theta}{2} = \underline{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$ なのでどちらも正。

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \frac{7}{9}}{2} = \frac{\frac{2}{9}}{2} = \frac{1}{9} \quad \text{よって} \quad \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \frac{7}{9}}{2} = \frac{\frac{16}{9}}{2} = \frac{8}{9} \quad \text{よって} \quad \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{3}, \quad \cos \frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

標準 (7~14)

$\sin \theta + \cos \theta$ を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ ($0 \leq \alpha < 2\pi$)。

$$r = \underline{\sqrt{2}} \quad \alpha = \underline{\frac{\pi}{4}}$$

$$a = 1, b = 1 \text{ より } r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ を満たす角は } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

8

合成

$\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ ($0 \leq \alpha < 2\pi$)。

$$r = \underline{2} \quad \alpha = \underline{\pi/3}$$

$$a = 1, b = \sqrt{3} \text{ より } r = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ を満たす角は } \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$$

9

合成・bが負

$\cos \theta - \sin \theta$ を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ ($0 \leq \alpha < 2\pi$)。

$$r = \underline{\sqrt{2}} \quad \alpha = \underline{3\pi/4}$$

$$\sin \theta \text{ の係数 } a = -1, \cos \theta \text{ の係数 } b = 1 \text{ より } r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (第2象限) を満たす角は } \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$\cos \theta - \sin \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{3\pi}{4} \right)$$

10

合成・aが負

$\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta$ を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ ($0 \leq \alpha < 2\pi$)。

$$r = \underline{2} \quad \alpha = \underline{2\pi/3}$$

$$\sin \theta \text{ の係数 } a = -1, \cos \theta \text{ の係数 } b = \sqrt{3} \text{ より } r = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (第2象限) を満たす角は } \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta = 2 \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right)$$

11

合成・aが負でbが正

$\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta$ を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ ($0 \leq \alpha < 2\pi$)。

$$r = \underline{2} \quad \alpha = \underline{5\pi/6}$$

$\sin \theta$ の係数 $a = -\sqrt{3}$ 、 $\cos \theta$ の係数 $b = 1$ より $r = \sqrt{3+1} = 2$

$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ (第2象限) を満たす角は $\alpha = \frac{5\pi}{6}$

$$\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta = 2 \sin \left(\theta + \frac{5\pi}{6} \right)$$

12

合成・両方負

$-\sin \theta - \cos \theta$ を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ ($0 \leq \alpha < 2\pi$)。

$$r = \underline{\sqrt{2}} \quad \alpha = \underline{5\pi/4}$$

$a = -1$ 、 $b = -1$ より $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 、 $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (第3象限) を満たす角は $\alpha = \frac{5\pi}{4}$

$$-\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{5\pi}{4} \right)$$

13

最大最小 (範囲の制限なし)

$y = \sin \theta + \cos \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) の最大値・最小値と、そのときの θ を求めよ。

$$\text{最大値 } \underline{\sqrt{2}} \quad (\theta = \underline{\pi/4}) \quad \text{最小値 } \underline{-\sqrt{2}} \quad (\theta = \underline{5\pi/4})$$

$y = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$ 。 θ に制限がないので $\theta + \frac{\pi}{4}$ もすべての角をとる。

最大値は $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ のとき、つまり $\theta = \frac{\pi}{4}$ で $y = \sqrt{2}$

最小値は $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$ のとき、つまり $\theta = \frac{5\pi}{4}$ で $y = -\sqrt{2}$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ で最大値 } \sqrt{2}、\theta = \frac{5\pi}{4} \text{ で最小値 } -\sqrt{2}$$

14

最大最小（範囲の制限なし）

$y = \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) の最大値・最小値と、そのときの θ を求めよ。

最大値 2 ($\theta = \underline{\pi/3}$) 最小値 -2 ($\theta = \underline{4\pi/3}$)

$y = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right)$ 。 θ に制限がないのでそのまま最大最小が使える。

最大値は $\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ のとき、つまり $\theta = \frac{\pi}{3}$ で $y = 2$

最小値は $\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$ のとき、つまり $\theta = \frac{4\pi}{3}$ で $y = -2$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ で最大値 2、 $\theta = \frac{4\pi}{3}$ で最小値 -2

挑戦 (15~18)

15

2倍角の逆算

$\cos 2\theta = \frac{7}{25}$ 、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ を求めよ。

$\cos \theta = \underline{4/5}$ $\sin \theta = \underline{3/5}$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \text{ より } \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} = \frac{1 + \frac{7}{25}}{2} = \frac{\frac{32}{25}}{2} = \frac{16}{25}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より } \cos \theta > 0 \text{ なので } \cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \text{ (}\theta \text{ は第1象限で正)}$$

$$\cos \theta = \frac{4}{5}, \sin \theta = \frac{3}{5}$$

16

最大最小（範囲の制限あり）

$y = \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) の最大値・最小値と、そのときの θ を求めよ。

最大値 2 ($\theta = \underline{\pi/3}$) 最小値 1 ($\theta = \underline{0}$)

$$y = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right). \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} \leq \frac{2\pi}{3}$$

この範囲に $\frac{\pi}{2}$ が含まれるので、そこが最大： $\theta = \frac{\pi}{3}$ で $y = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2$

両端を比べる： $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ 、 $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。小さいのは $\frac{\pi}{6}$ の方なので、そこが最小： $\theta = 0$ で $y = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 1$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ で最大値 2、 $\theta = 0$ で最小値 1

17

tan θ から2倍角tan

$\tan \theta = \frac{1}{2}$ のとき、 $\tan 2\theta$ を求めよ。

$\tan 2\theta = \underline{4/3}$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\tan 2\theta = \frac{4}{3}$$

半角の公式を使って、 $\cos \frac{\pi}{8}$ の値を求めよ（ $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ を利用する）。

$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4}$ なので、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ として半角の公式を使う。

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ なので $\cos \frac{\pi}{8} > 0$ 。よって

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。おきかえと2倍角の組み合わせで、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

$t = \sin \theta + \cos \theta$ のおきかえ

$y = 2 \sin \theta \cos \theta + \sin \theta + \cos \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 $1 + \sqrt{2}$ 最小値 $-\frac{5}{4}$

$t = \sin \theta + \cos \theta$ とおく。両辺を2乗すると $t^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$ より
 $2 \sin \theta \cos \theta = t^2 - 1$ 。

$t = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$ より、 θ が全実数 ($0 \leq \theta < 2\pi$) を動くとき t の範囲は
 $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ 。

もとの式に代入すると $y = (t^2 - 1) + t = t^2 + t - 1 = \left(t + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{5}{4}$

これは t の下に凸な2次関数。頂点 $t = -\frac{1}{2}$ は範囲 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ の中にあるので、そこが最小： $y = -\frac{5}{4}$

最大値は頂点から遠い端を比べて判断する。頂点 $-\frac{1}{2}$ から $\sqrt{2} \approx 1.41$ までの距離は約1.91、 $-\sqrt{2} \approx -1.41$ までの距離は約0.91。遠いのは $t = \sqrt{2}$ 側。

$t = \sqrt{2}$ のとき $y = 2 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \sqrt{2}$

$t = -\sqrt{2}$ のとき $y = 2 - \sqrt{2} - 1 = 1 - \sqrt{2}$ (こちらは最大値ではない)

比べると $1 + \sqrt{2} > 1 - \sqrt{2}$ なので、最大値は $t = \sqrt{2}$ のときの $1 + \sqrt{2}$ 。

最大値 $1 + \sqrt{2}$ 、最小値 $-\frac{5}{4}$

$y = \sin 2\theta - 2(\sin \theta - \cos \theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 2 最小値 $-1-2\sqrt{2}$

$t = \sin \theta - \cos \theta$ とおく。両辺を2乗すると $t^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta$ より $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 1 - t^2$ 。

$t = \sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$ より t の範囲は $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ 。

もとの式に代入すると $y = (1 - t^2) - 2t = -t^2 - 2t + 1 = -(t + 1)^2 + 2$

これは t の上に凸な2次関数。頂点 $t = -1$ は範囲 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ の中にあるので、そこが最大： $y = 2$

最小値は頂点から遠い端を比べる。頂点 -1 から $\sqrt{2} \approx 1.41$ までの距離は約2.41、 $-\sqrt{2} \approx -1.41$ までの距離は約0.41。遠いのは $t = \sqrt{2}$ 側。

$t = \sqrt{2}$ のとき $y = -(\sqrt{2} + 1)^2 + 2 = -(3 + 2\sqrt{2}) + 2 = -1 - 2\sqrt{2}$

最大値 2、最小値 $-1 - 2\sqrt{2}$

応3

2倍角の方程式（次ページへの布石）

$\cos 2\theta = \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を満たす θ をすべて求めよ。小さい順にコンマ区切りで入力せよ。

$$\theta = \underline{\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2}$$

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$ を使って $\sin \theta$ だけの式にする。

$$1 - 2\sin^2 \theta = \sin \theta$$

$$2\sin^2 \theta + \sin \theta - 1 = 0$$

$$(2\sin \theta - 1)(\sin \theta + 1) = 0$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \text{ または } \sin \theta = -1$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \text{ } (0 \leq \theta < 2\pi) \text{ を満たすのは } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$$\sin \theta = -1 \text{ を満たすのは } \theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$$

応4

和の2乗から2倍角

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ で $\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5}$ のとき、 $\sin 2\theta$ の値を求めよ。

$$\sin 2\theta = \underline{24/25}$$

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5}$ の両辺を2乗する。

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{49}{25}$$

$$1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{49}{25}$$

$$2\sin \theta \cos \theta = \frac{49}{25} - 1 = \frac{24}{25}$$

$\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$ なので、そのまま

$$\sin 2\theta = \frac{24}{25}$$

$y = 2 \sin \theta + 2\sqrt{3} \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$) の最大値・最小値と、そのときの θ を求めよ。

最大値 4 ($\theta = \underline{\pi/6}$) 最小値 0 ($\theta = \underline{2\pi/3}$)

$$a = 2, b = 2\sqrt{3} \text{ より } r = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \sin \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ より } \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$y = 4 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right). 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3} \text{ のとき } \frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \pi$$

この範囲に $\frac{\pi}{2}$ が含まれるので、そこが最大： $\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ より $\theta = \frac{\pi}{6}$ 、 $y = 4 \sin \frac{\pi}{2} = 4$

両端を比べる： $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.87$ 、 $\sin \pi = 0$ 。小さいのは π の方なので、そこが最小： $\theta + \frac{\pi}{3} = \pi$ より $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 、 $y = 4 \sin \pi = 0$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ で最大値 4、 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ で最小値 0