

加法定理

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ /23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～8）

1

$75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$

$\sin 75^\circ$ の値を求めよ。

$\sin 75^\circ = \underline{(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4}$

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} +$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

2

$$75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$$

$\cos 75^\circ$ の値を求めよ。

$$\cos 75^\circ = \underline{(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4}$$

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \\ &\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

3

$$75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$$

$\tan 75^\circ$ の値を求めよ。

$$\tan 75^\circ = \underline{2+\sqrt{3}}$$

$$\tan 75^\circ = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$\text{分母を有理化すると} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$$

4

$$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$$

$\sin 15^\circ$ の値を求めよ。

$$\sin 15^\circ = \underline{(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4}$$

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \\ &\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

5

$$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$$

$\cos 15^\circ$ の値を求めよ。

$$\cos 15^\circ = \underline{(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4}$$

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \\ &\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

6

$$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$$

$\tan 15^\circ$ の値を求めよ。

$$\tan 15^\circ = \underline{2 - \sqrt{3}}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$\text{分母を有理化すると} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

7

$$105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$$

$\sin 105^\circ$ の値を求めよ。

$$\sin 105^\circ = \underline{(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4}$$

$$\begin{aligned}\sin 105^\circ &= \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \\ &\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &(105^\circ = 180^\circ - 75^\circ \text{ より } \sin 105^\circ = \sin 75^\circ \text{ となることでも確かめられる})\end{aligned}$$

$$\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

8

$$105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$$

$\cos 105^\circ$ の値を求めよ。

$$\cos 105^\circ = \underline{(\sqrt{2} - \sqrt{6})/4}$$

$$\begin{aligned}\cos 105^\circ &= \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \\ &\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

$$\cos 105^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \quad (\text{負の値。} 105^\circ \text{ は鈍角なので } \cos \text{ が負になるのは自然})$$

- 9 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)、 $\cos \beta = \frac{4}{5}$ ($0^\circ < \beta < 90^\circ$) のとき、 $\sin(\alpha + \beta)$ 、 $\cos(\alpha + \beta)$ を求めよ。

$$\sin(\alpha + \beta) = \underline{24/25} \quad \cos(\alpha + \beta) = \underline{7/25}$$

α, β はどちらも第1象限なので $\cos \alpha, \sin \beta$ はともに正。

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}, \sin \beta = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25} + \frac{12}{25} = \frac{24}{25}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{24}{25}, \cos(\alpha + \beta) = \frac{7}{25}$$

- 10 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$)、 $\sin \beta = \frac{5}{13}$ ($0^\circ < \beta < 90^\circ$) のとき、 $\sin(\alpha + \beta)$ 、 $\cos(\alpha + \beta)$ を求めよ。

$$\sin(\alpha + \beta) = \underline{33/65} \quad \cos(\alpha + \beta) = \underline{-56/65}$$

$$\alpha \text{ は第2象限なので } \cos \alpha < 0 : \cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\beta \text{ は第1象限なので } \cos \beta > 0 : \cos \beta = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} + \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{5}{13} = \frac{48}{65} - \frac{15}{65} = \frac{33}{65}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{12}{13} - \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = -\frac{36}{65} - \frac{20}{65} = -\frac{56}{65}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{33}{65}, \cos(\alpha + \beta) = -\frac{56}{65}$$

- 11 $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$)、 $\sin \beta = -\frac{3}{5}$ ($180^\circ < \beta < 270^\circ$) のとき、 $\sin(\alpha - \beta)$ 、 $\cos(\alpha - \beta)$ を求めよ。

$$\sin(\alpha - \beta) = \underline{-63/65} \quad \cos(\alpha - \beta) = \underline{-16/65}$$

$$\alpha \text{ は第2象限なので } \sin \alpha > 0 : \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$$

$$\beta \text{ は第3象限なので } \cos \beta < 0 : \cos \beta = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{12}{13} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - \left(-\frac{5}{13}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \\ &= -\frac{48}{65} - \frac{15}{65} = -\frac{63}{65} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \left(-\frac{5}{13}\right) \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{12}{13} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \\ &= \frac{20}{65} - \frac{36}{65} = -\frac{16}{65} \end{aligned}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = -\frac{63}{65}, \cos(\alpha - \beta) = -\frac{16}{65}$$

- 12 $\tan \alpha = 3$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)、 $\tan \beta = \frac{1}{7}$ ($0^\circ < \beta < 90^\circ$) のとき、 $\tan(\alpha + \beta)$ を求めよ。

$$\tan(\alpha + \beta) = \underline{11/2}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{3 + \frac{1}{7}}{1 - 3 \cdot \frac{1}{7}} = \frac{\frac{22}{7}}{\frac{4}{7}} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{11}{2}$$

- 13 $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$)、 $\tan \beta = 2$ ($0^\circ < \beta < 90^\circ$) のとき、 $\tan(\alpha + \beta)$ を求めよ。

$$\tan(\alpha + \beta) = \underline{\underline{1/2}}$$

象限の条件はtanの値そのものには影響しない (tanの加法定理はtan α , tan β の値だけで計算できる)。

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{-\frac{3}{4} + 2}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 2} = \frac{\frac{5}{4}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{2}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$$

- 14 $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)、 $\tan \beta = -\frac{3}{4}$ ($90^\circ < \beta < 180^\circ$) のとき、 $\sin(\alpha + \beta)$ 、 $\cos(\alpha + \beta)$ を求めよ。

$$\sin(\alpha + \beta) = \underline{\underline{16/65}} \quad \cos(\alpha + \beta) = \underline{\underline{-63/65}}$$

$$\alpha \text{ は第1象限なので } \cos \alpha > 0 : \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$$

β は第2象限、 $\tan \beta = -\frac{3}{4} < 0$ なので $\sin \beta > 0$, $\cos \beta < 0$ 。辺の比 3 : 4 : 5 を使うと $\sin \beta = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = -\frac{4}{5}$ (符号だけ象限で決める)。

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{5}{13} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{20}{65} + \frac{36}{65} = \frac{16}{65}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{12}{13} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{48}{65} - \frac{15}{65} = -\frac{63}{65}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{16}{65}, \cos(\alpha + \beta) = -\frac{63}{65}$$

挑戦 (15~18)

15

$105^\circ = 60^\circ + 45^\circ \cdot \tan$

$\tan 105^\circ$ の値を求めよ。

$$\tan 105^\circ = \underline{-2-\sqrt{3}}$$

$$\tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}}$$

分母を有理化するため、分子・分母に $(1 + \sqrt{3})$ をかける。

$$= \frac{(\sqrt{3} + 1)(1 + \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{1 - 3} = \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{-2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -(2 + \sqrt{3})$$

$\tan 105^\circ = -2 - \sqrt{3}$ (105°は鈍角なのでtanが負になるのは自然。実際

$\tan 105^\circ = -\tan 75^\circ$ でも確かめられる)

16

答えに根号が残るタイプ

$\sin \alpha = \frac{2}{3}$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)、 $\cos \beta = -\frac{1}{3}$ ($90^\circ < \beta < 180^\circ$) のとき、 $\sin(\alpha + \beta)$ を求めよ。

$$\sin(\alpha + \beta) = \underline{(2\sqrt{10}-2)/9}$$

$$\alpha \text{ は第1象限なので } \cos \alpha > 0 : \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\beta \text{ は第2象限なので } \sin \beta > 0 : \sin \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{2}{9} + \frac{2\sqrt{10}}{9}$$

$$(\sqrt{5} \times \sqrt{2} = \sqrt{10} \text{ を使った})$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{2\sqrt{10} - 2}{9}$$

$\tan \alpha = 2$ 、 $\tan \beta = 3$ （ともに $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 、 $0^\circ < \beta < 90^\circ$ ）のとき、 $\alpha + \beta$ の大きさを求めよ（度数で答えよ）。

$$\alpha + \beta = \underline{135}^\circ$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{2 + 3}{1 - 2 \cdot 3} = \frac{5}{-5} = -1$$

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 、 $0^\circ < \beta < 90^\circ$ より $0^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ$ 。この範囲で $\tan(\alpha + \beta) = -1$ となるのは $\alpha + \beta = 135^\circ$ のときだけ（ $\tan$ が負になるのは範囲の後半、鈍角のとき）。

$$\alpha + \beta = 135^\circ$$

$\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)、 $\cos \beta = -\frac{5}{13}$ ($90^\circ < \beta < 180^\circ$) のとき、 $\tan(\alpha + \beta)$ を求めよ。

$$\tan(\alpha + \beta) = \underline{-33/56}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \text{ (第1象限で正)}、\sin \beta = \frac{12}{13} \text{ (第2象限で正)}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) + \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} = -\frac{15}{65} + \frac{48}{65} = \frac{33}{65}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) - \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} = -\frac{20}{65} - \frac{36}{65} = -\frac{56}{65}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\frac{33}{65}}{-\frac{56}{65}} = -\frac{33}{56}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = -\frac{33}{56}$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。加法定理の逆利用や2直線のなす角の応用に挑戦しよう。

応1

2直線のなす角

2直線 $y = 2x + 1$ 、 $y = \frac{1}{3}x - 2$ のなす角 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) を求めよ。

$\theta = \underline{45}$

傾きはそれぞれ $m_1 = 2$, $m_2 = \frac{1}{3}$ 。2直線のなす角の公式より

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} \right| = \left| \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} \right| = 1$$

$\tan \theta = 1$ で $0^\circ < \theta < 90^\circ$ だから $\theta = 45^\circ$ 。

$\theta = 45^\circ$

応2

加法定理の逆利用 (sin)

$\sin 80^\circ \cos 20^\circ - \cos 80^\circ \sin 20^\circ$ の値を求めよ。

値 $\underline{\sqrt{3}/2}$

式の形が $\sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin(A - B)$ (加法定理の右辺) と一致していることに気づくのがポイント。 $A = 80^\circ$, $B = 20^\circ$ として逆向きに使う。

$$\sin 80^\circ \cos 20^\circ - \cos 80^\circ \sin 20^\circ = \sin(80^\circ - 20^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

応3

加法定理の逆利用 (tan)

$\frac{\tan 50^\circ - \tan 20^\circ}{1 + \tan 50^\circ \tan 20^\circ}$ の値を求めよ。

値 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

式の形が $\frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} = \tan(A - B)$ (tanの加法定理の右辺) と一致している。 $A = 50^\circ$, $B = 20^\circ$ として逆向きに使う。

$$\frac{\tan 50^\circ - \tan 20^\circ}{1 + \tan 50^\circ \tan 20^\circ} = \tan(50^\circ - 20^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

応4

2直線のなす角から傾きを逆算

直線 $y = x + 3$ との2直線のなす角が 45° になるように、直線 $y = mx - 2$ ($m \neq 1$) の傾き m を求めよ。

$m =$ 0

直線 $y = x + 3$ の傾きは 1。なす角の公式より

$$\tan 45^\circ = \left| \frac{1 - m}{1 + 1 \cdot m} \right| = 1$$

絶対値を外すと $1 - m = 1 + m$ または $1 - m = -(1 + m)$ の2通り。

第1式: $1 - m = 1 + m \Rightarrow -2m = 0 \Rightarrow m = 0$

第2式: $1 - m = -1 - m \Rightarrow 1 = -1$ (成り立たない・解なし)

(なお $1 + m = 0$ 、つまり $m = -1$ のときは分母が0になり2直線は垂直 $= 90^\circ$ 。今回求めたいのは 45° なのでこれは条件に合わない)

$$m = 0$$

$\cos 80^\circ \cos 35^\circ + \sin 80^\circ \sin 35^\circ$ の値を求めよ。

値 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

式の形が $\cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos(A - B)$ (cosの加法定理の右辺) と一致している。 $A = 80^\circ$, $B = 35^\circ$ として逆向きに使う。

$$\cos 80^\circ \cos 35^\circ + \sin 80^\circ \sin 35^\circ = \cos(80^\circ - 35^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$