

一般角と弧度法

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～7）

1

度→ラジアン

60° をラジアンで表せ。

$$\theta = \underline{\pi/3}$$

$$60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3}$$

2

度→ラジアン

120° をラジアンで表せ。

$$\theta = \underline{2\pi/3}$$

$$120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi}{3}$$

3

度→ラジアン

315° をラジアンで表せ。

$$\theta = \underline{7\pi/4}$$

$$315 \times \frac{\pi}{180} = \frac{315}{180}\pi = \frac{7}{4}\pi$$

$$\frac{7}{4}\pi$$

4

ラジアン→度

$\frac{\pi}{6}$ を度で表せ。

$$\theta = \underline{30} \text{ 度}$$

$$\frac{\pi}{6} \times \frac{180}{\pi} = 30^\circ$$

$$30^\circ$$

5

ラジアン→度

$\frac{4}{3}\pi$ を度で表せ。

$$\theta = \underline{240} \text{ 度}$$

$$\frac{4}{3}\pi \times \frac{180}{\pi} = \frac{4}{3} \times 180 = 240^\circ$$

$$240^\circ$$

6

弧の長さ

半径 5、中心角 $\frac{\pi}{5}$ の扇形の弧の長さを求めよ。

弧の長さ π

$$l = r\theta = 5 \times \frac{\pi}{5} = \pi$$

π

7

扇形の面積

半径 2、中心角 $\frac{\pi}{2}$ の扇形の面積を求めよ。

面積 π

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{\pi}{2} = \pi$$

π

標準 (8~14)

8

弧の長さ→中心角

半径 6 の扇形の弧の長さが 2π であるとき、中心角をラジアンで求めよ。

$\theta =$ $\pi/3$

$$l = r\theta \text{ より } \theta = \frac{l}{r} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$\frac{\pi}{3}$

9

面積→中心角

半径 10 の扇形の面積が 25π であるとき、中心角をラジアンで求めよ。

$$\theta = \underline{\pi/2}$$

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta \text{ より } \theta = \frac{2S}{r^2} = \frac{2 \times 25\pi}{100} = \frac{50\pi}{100} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2}$$

10

弧の長さ

半径 9、中心角 $\frac{4}{9}\pi$ の扇形の弧の長さを求めよ。

$$\text{弧の長さ } \underline{4\pi}$$

$$l = r\theta = 9 \times \frac{4}{9}\pi = 4\pi$$

$$4\pi$$

11

象限判定（数字で入力。例: 第3象限のときは「3」）

$\theta = 225^\circ$ の動径はどの象限にあるか。

第 3 象限

$180^\circ < 225^\circ < 270^\circ$ なので第3象限。

第3象限

12

象限判定（数字で入力）

$\theta = 100^\circ$ の動径はどの象限にあるか。

第 2 象限

$90^\circ < 100^\circ < 180^\circ$ なので第2象限。

第2象限

13

象限判定（負の角に注意）

$\theta = -45^\circ$ の動径はどの象限にあるか。

第 4 象限

$-45^\circ + 360^\circ = 315^\circ$ 。 $270^\circ < 315^\circ < 360^\circ$ なので第4象限。

第4象限

14

象限判定（ラジアン・ 360° 超え）

$\theta = \frac{17}{6}\pi$ の動径はどの象限にあるか。

第 2 象限

$\frac{17}{6}\pi - 2\pi = \frac{17}{6}\pi - \frac{12}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi (= 150^\circ)$ 。

$90^\circ < 150^\circ < 180^\circ$ なので第2象限。

第2象限

挑戦 (15~18)

15

弧の長さ と 面積の両方

半径 12cm、中心角 $\frac{5}{6}\pi$ の扇形の弧の長さ と 面積を求めよ。

弧の長さ 10π cm 面積 60π cm²

$$\text{弧の長さ: } l = r\theta = 12 \times \frac{5}{6}\pi = 10\pi$$

$$\text{面積: } S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2} \times 12 \times 10\pi = 60\pi$$

弧の長さ 10π cm、面積 60π cm²

16

半径を変えたときの倍率

扇形の中心角を変えずに、半径だけを 4 倍にした。弧の長さは何倍になるか。また面積は何倍になるか。

弧の長さは 4 倍 面積は 16 倍

$l = r\theta$ で θ は一定なので、 r を 4 倍にすると l も 4 倍。

$S = \frac{1}{2}r^2\theta$ は r^2 に比例するので、 r を 4 倍にすると S は $4^2 = 16$ 倍。

弧の長さは 4 倍、面積は 16 倍

17

象限判定 (マイナスの大きい角)

$\theta = -400^\circ$ の動径はどの象限にあるか。

第 4 象限

$-400^\circ + 360^\circ = -40^\circ$ 、まだ負なのでもう一度 360° を足す。

$-40^\circ + 360^\circ = 320^\circ$ 。 $270^\circ < 320^\circ < 360^\circ$ なので第 4 象限。

第 4 象限

$\theta = \frac{25}{4}\pi$ と同じ動径の位置にある角のうち、 $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たすものを求めよ。

$$\theta = \underline{\pi/4}$$

$2\pi = \frac{8}{4}\pi$ を何回か引いて 0 以上 2π 未満にする。

$$\frac{25}{4}\pi - \frac{8}{4}\pi \times 3 = \frac{25}{4}\pi - \frac{24}{4}\pi = \frac{1}{4}\pi$$

$$\frac{\pi}{4}$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

$\sin \theta + \cos \theta$ 型（数Iの復習を一般角で）

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ のとき、次の値を求めよ。(1) $\sin \theta \cos \theta$ (2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

(1) $\sin \theta \cos \theta = \underline{-4/9}$ (2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \underline{13/27}$

(1) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ の両辺を2乗すると

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\text{左辺は } \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \text{ なので } 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9}、\text{ よって } \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$$

(2) 因数分解の公式 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ を使う。

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta) = \frac{1}{3} \times \left(1 - \left(-\frac{4}{9}\right)\right) = \frac{1}{3} \times \frac{13}{9} = \frac{13}{27}$$

$$\sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}、\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \frac{13}{27}$$

応2

扇形の周の長さ一定・面積最大

扇形の周の長さ（弧の長さ＋半径2本分）が 20cm で一定であるとき、面積 S を最大にする半径 r と、そのときの面積・中心角を求めよ。

$$r = \underline{5} \text{ cm} \quad \text{面積 } S = \underline{25} \text{ cm}^2 \quad \text{中心角 } \theta = \underline{2}$$

弧の長さを l とすると、周の長さの条件から $l + 2r = 20$ 、すなわち $l = 20 - 2r$ ($l > 0$ より $0 < r < 10$)。

$$\text{面積は } S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(20 - 2r) = 10r - r^2 = -(r - 5)^2 + 25$$

上に凸の2次関数で、頂点の $r = 5$ は範囲 $0 < r < 10$ の中にあるので、そのまま最大値。

$r = 5$ のとき $l = 20 - 10 = 10$ 、 $S = 25$ 。中心角は $\theta = \frac{l}{r} = \frac{10}{5} = 2$ (ラジアン)。

$r = 5\text{cm}$ のとき面積の最大値 25cm^2 (中心角 2 ラジアン)

応3

方程式を満たす θ をすべて求める

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、 $\sin \theta = \frac{1}{2}$ を満たす θ をすべて求めよ。(コンマ区切りで入力)

$$\theta = \underline{\pi/6, 5\pi/6}$$

$\sin \theta > 0$ となるのは単位円の上半分 (第1・第2象限)。

基準角は $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ の $\frac{\pi}{6}$ ($= 30^\circ$)。

第1象限にそのまま $\theta = \frac{\pi}{6}$ 、第2象限には $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$ 。

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

応4

弧の長さから半径・中心角を求める

ある扇形の弧の長さが 12、面積が 36 であるとき、この扇形の半径 r と中心角 θ (ラジアン) を求めよ。

$$r = \underline{6} \quad \theta = \underline{2}$$

面積の公式 $S = \frac{1}{2}rl$ を使うと、 θ を経由せずに r だけの式になる。

$$36 = \frac{1}{2} \times r \times 12 = 6r, \text{ よって } r = 6.$$

$$\text{中心角は } l = r\theta \text{ より } \theta = \frac{l}{r} = \frac{12}{6} = 2.$$

$$r = 6, \theta = 2 \text{ (ラジアン)}$$

応5

2次方程式と θ の決定 (コンマ区切り)

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、 $2\sin^2 \theta - \sin \theta - 1 = 0$ を満たす θ をすべて求めよ。

$$\theta = \underline{\pi/2, 7\pi/6, 11\pi/6}$$

$\sin \theta = s$ とおくと $2s^2 - s - 1 = 0$ 。因数分解すると $(2s + 1)(s - 1) = 0$ 、よって $s = -\frac{1}{2}$ または $s = 1$ 。

$\sin \theta = 1$ のとき: $\theta = \frac{\pi}{2}$ のみ (sinの最大値になる位置は1か所)。

$\sin \theta = -\frac{1}{2}$ のとき: 単位円の下半分 (第3・第4象限)。基準角 $\frac{\pi}{6}$ を使うと

$$\theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi \text{ (第3象限)}, \theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi \text{ (第4象限)}.$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$$