

三角関数 まとめ

解答（全27問）

氏名 _____

得点 _____ / 27点

DRILL

まとめテスト（標準）

基本（1～15）

1

度→ラジアン

150°をラジアンで表せ。

$\theta = \underline{5\pi/6}$

$$150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{6}$$

2

ラジアン→度

$\frac{7}{6}\pi$ を度で表せ。

$\theta = \underline{210}$ 度

$$\frac{7}{6}\pi \times \frac{180}{\pi} = \frac{7}{6} \times 180 = 210^\circ$$

210°

3

弧の長さ

半径8、中心角 $\frac{3}{4}\pi$ の扇形の弧の長さを求めよ。

弧の長さ $\underline{6\pi}$

$$l = r\theta = 8 \times \frac{3}{4}\pi = 6\pi$$

6π

4

扇形の面積

半径4、中心角 $\frac{\pi}{3}$ の扇形の面積を求めよ。

面積 $\underline{8\pi/3}$

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 16 \times \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

$\frac{8\pi}{3}$

$\theta = 250^\circ$ の動径はどの象限にあるか。

第 3 象限

$180^\circ < 250^\circ < 270^\circ$ なので第3象限。

第3象限

$\theta = 120^\circ$ のとき、 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ を求めよ。

$$\sin \theta = \underline{\sqrt{3}/2} \quad \cos \theta = \underline{-1/2} \quad \tan \theta = \underline{-\sqrt{3}}$$

$120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$ 。単位円で第2象限 ($x < 0, y > 0$) の位置にあり、基準角は 60° 。

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ} = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3}$$

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}, \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

7

相互関係と象限（第3象限）

$\cos \theta = -\frac{5}{13}$ ($180^\circ < \theta < 270^\circ$) のとき、 $\sin \theta$, $\tan \theta$ を求めよ。

$$\sin \theta = \underline{-12/13} \quad \tan \theta = \underline{12/5}$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より $\sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$ 、よって

$$\sin \theta = \pm \frac{12}{13}。$$

第3象限では $\sin \theta < 0$ なので $\sin \theta = -\frac{12}{13}$ 。

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-12/13}{-5/13} = \frac{12}{5}$$

$$\sin \theta = -\frac{12}{13}, \tan \theta = \frac{12}{5}$$

8

グラフの振幅・周期

$y = 4 \sin x$ の振幅と周期を求めよ。

$$\text{振幅} \quad \underline{4} \quad \text{周期} \quad \underline{2\pi}$$

振幅は $|a|$ 。 $a = 4$ なので振幅は4。 $b = 1$ なので周期は $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$ 。

振幅4、周期 2π

9

tanのグラフの周期

$y = \tan \frac{x}{2}$ の周期を求めよ。

$$\text{周期} \quad \underline{2\pi}$$

$y = \tan bx$ の周期は $\frac{\pi}{|b|}$ 。 $b = \frac{1}{2}$ なので周期は $\pi \div \frac{1}{2} = 2\pi$ 。

周期 2π

10

グラフの最大値・最小値

$y = 2 \cos 3x$ の最大値・最小値を求めよ。

最大値 2 最小値 -2

$\cos 3x$ は -1 以上 1 以下なので、 $2 \cos 3x$ は -2 以上 2 以下。

最大値2、最小値 -2

11

加法定理・ $180^\circ - \theta$ 型

$\tan 165^\circ$ の値を求めよ ($165^\circ = 180^\circ - 15^\circ$ とみる)。

$\tan 165^\circ =$ $\sqrt{3}-2$

$165^\circ = 180^\circ - 15^\circ$ なので $\tan 165^\circ = \tan(180^\circ - 15^\circ) = -\tan 15^\circ$ 。

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} =$$

$$\frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{よって} \tan 165^\circ = -(2 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 2$$

$$\tan 165^\circ = \sqrt{3} - 2$$

$\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)、 $\cos \beta = \frac{3}{5}$ ($0^\circ < \beta < 90^\circ$) のとき、 $\sin(\alpha + \beta)$ 、 $\cos(\alpha + \beta)$ を求めよ。

$$\sin(\alpha + \beta) = \underline{\underline{63/65}} \quad \cos(\alpha + \beta) = \underline{\underline{16/65}}$$

α, β はどちらも第1象限なので $\cos \alpha, \sin \beta$ はともに正。

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}, \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} + \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} = \frac{15}{65} + \frac{48}{65} = \frac{63}{65}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} - \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} = \frac{36}{65} - \frac{20}{65} = \frac{16}{65}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{63}{65}, \quad \cos(\alpha + \beta) = \frac{16}{65}$$

$\tan \theta = \frac{1}{3}$ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) のとき、 $\sin 2\theta$ 、 $\cos 2\theta$ 、 $\tan 2\theta$ を求めよ。

$$\sin 2\theta = \underline{\underline{3/5}} \quad \cos 2\theta = \underline{\underline{4/5}} \quad \tan 2\theta = \underline{\underline{3/4}}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{3} \text{ より 直角三角形の対辺 } 1 \cdot \text{隣辺 } 3 \cdot \text{斜辺 } \sqrt{10} \text{ と考えて } \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 1 - 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\sin 2\theta = \frac{3}{5}, \quad \cos 2\theta = \frac{4}{5}, \quad \tan 2\theta = \frac{3}{4}$$

14

半角 ($\theta/2$ の象限に注意)

$\cos \theta = -\frac{1}{3}$ ($90^\circ < \theta < 180^\circ$) のとき、 $\sin \frac{\theta}{2}$, $\cos \frac{\theta}{2}$ を求めよ。

$$\sin \frac{\theta}{2} = \underline{\underline{\sqrt{6}/3}} \quad \cos \frac{\theta}{2} = \underline{\underline{\sqrt{3}/3}}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ より $45^\circ < \frac{\theta}{2} < 90^\circ$ (第1象限) なので、 $\sin \frac{\theta}{2}$, $\cos \frac{\theta}{2}$ はどちらも正 (θ 自身は第2象限だが、 $\frac{\theta}{2}$ は第1象限になる点に注意)。

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} = \frac{1 - (-\frac{1}{3})}{2} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3} \quad \text{よって} \sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} = \frac{1 + (-\frac{1}{3})}{2} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3} \quad \text{よって} \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

15

三角関数の合成 (基本)

$3 \sin \theta - 3\sqrt{3} \cos \theta$ を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ ($0 \leq \alpha < 2\pi$)。

$$r = \underline{\underline{6}} \quad \alpha = \underline{\underline{5\pi/3}}$$

$$a = 3, b = -3\sqrt{3} \text{ より } r = \sqrt{9 + 27} = \sqrt{36} = 6$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{r} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \sin \alpha = \frac{b}{r} = \frac{-3\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{第4象限}) \quad \text{を満たす角は}$$

$$\alpha = \frac{5\pi}{3}$$

$$3 \sin \theta - 3\sqrt{3} \cos \theta = 6 \sin \left(\theta + \frac{5\pi}{3} \right)$$

16

2倍角の逆算

$\cos 2\theta = \frac{1}{9}$ 、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ を求めよ。

$$\cos \theta = \underline{\underline{\sqrt{5}/3}} \quad \sin \theta = \underline{\underline{2/3}}$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \text{ より } \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} = \frac{1 + \frac{1}{9}}{2} = \frac{\frac{10}{9}}{2} = \frac{5}{9}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より } \cos \theta > 0 \text{ なので } \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \quad (\theta \text{ は第1象限で正})$$

$$\text{検算: } \cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 1 - 2 \cdot \frac{4}{9} = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9} \quad (\text{一致})$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}, \sin \theta = \frac{2}{3}$$

$2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を満たす θ をすべて求めよ。小さい順にコンマ区切りで入力せよ。

$\theta = \underline{0, \pi/3, 5\pi/3}$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ を代入して $\cos\theta$ だけの式にする。

$$2(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta - 3 = 0$$

$$2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$$

$$-2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 1 = 0$$

$$\text{両辺に}-1\text{をかけて} 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$$

$$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 1) = 0$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \text{ または } \cos\theta = 1 \quad (\text{どちらも } -1 \leq t \leq 1 \text{ に収まるので有効})$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \text{ を満たすのは } \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

$$\cos\theta = 1 \text{ を満たすのは } \theta = 0$$

$$\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

$\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta \geq 1$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を満たす θ の範囲を求めよ。

$$\underline{\pi/2} \leq \theta \leq \underline{7\pi/6}$$

$a = 1$ 、 $b = -\sqrt{3}$ より $r = \sqrt{1+3} = 2$ 、 $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ 、 $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ より $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ 。

$$2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \geq 1 \quad \text{より} \quad \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \geq \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \theta - \frac{\pi}{3} \text{ とおく。 } 0 \leq \theta < 2\pi \text{ より } -\frac{\pi}{3} \leq \varphi < \frac{5\pi}{3}$$

この範囲で $\sin \varphi \geq \frac{1}{2}$ となるのは $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}$ ($\varphi < \frac{\pi}{6}$ 側は範囲の左端 $-\frac{\pi}{3}$ から $\frac{\pi}{6}$ まで $\sin \varphi < \frac{1}{2}$ なので含まない)

$$\theta = \varphi + \frac{\pi}{3} \text{ で戻すと、 } \varphi = \frac{\pi}{6} \text{ のとき } \theta = \frac{\pi}{2}、\varphi = \frac{5\pi}{6} \text{ のとき } \theta = \frac{7\pi}{6}$$

検算： $\theta = \pi$ (範囲内) を代入すると $\sin \pi - \sqrt{3} \cos \pi = 0 + \sqrt{3} = \sqrt{3} \geq 1$ で成り立つ。

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{6}$$

19

加法定理（象限混在）

$\sin \alpha = \frac{8}{17}$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)、 $\cos \beta = -\frac{3}{5}$ ($90^\circ < \beta < 180^\circ$) のとき、 $\cos(\alpha - \beta)$ を求めよ。

$$\cos(\alpha - \beta) = \underline{\underline{-13/85}}$$

$$\alpha \text{ は第1象限なので } \cos \alpha > 0 : \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \sqrt{\frac{225}{289}} = \frac{15}{17}$$

$$\beta \text{ は第2象限なので } \sin \beta > 0 : \sin \beta = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{15}{17} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{8}{17} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{45}{85} + \frac{32}{85} = -\frac{13}{85}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = -\frac{13}{85}$$

20

2直線のなす角

2直線 $y = 5x - 1$ 、 $y = \frac{2}{3}x + 4$ のなす角 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) を求めよ。

$$\theta = \underline{\underline{45}}^\circ$$

傾きはそれぞれ $m_1 = 5$ 、 $m_2 = \frac{2}{3}$ 。2直線のなす角の公式より

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{5 - \frac{2}{3}}{1 + 5 \cdot \frac{2}{3}} \right| = \left| \frac{\frac{13}{3}}{\frac{13}{3}} \right| = 1$$

$\tan \theta = 1$ で $0^\circ < \theta < 90^\circ$ だから $\theta = 45^\circ$ 。

$$\theta = 45^\circ$$

ある地点の気温 y (°C) が、時刻 x (時間、 $x \geq 0$) に対して $y = 5 \sin \frac{\pi}{12}x + 20$ で近似できるとする。気温の周期・最大値・最小値をそれぞれ求めよ。また、最初に気温が最大になるのは x が何時間後か求めよ。

周期 24 時間 最大値 25 °C 最小値 15 °C

最初に最大になる時刻 $x =$ 6

周期： $b = \frac{\pi}{12}$ なので $\frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \div \frac{\pi}{12} = 2\pi \times \frac{12}{\pi} = 24$ (時間)。

最大最小： $\sin \frac{\pi}{12}x$ は -1 以上 1 以下なので、 $5 \sin \frac{\pi}{12}x$ は -5 以上 5 以下、
 $5 \sin \frac{\pi}{12}x + 20$ は $-5 + 20 = 15$ 以上 $5 + 20 = 25$ 以下。

最初に最大になるのは $\sin \frac{\pi}{12}x = 1$ となる最初の x 。これは $\frac{\pi}{12}x = \frac{\pi}{2}$ のときなので、
 $x = \frac{\pi}{2} \div \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} \times \frac{12}{\pi} = 6$ 。

周期24時間、最大値25°C、最小値15°C、最初に最大になるのは $x = 6$ (時間後)

$y = \sin \theta - \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) の最大値・最小値と、そのときの θ を求めよ。

最大値 $\sqrt{2}$ ($\theta = \underline{\underline{3\pi/4}}$) 最小値 -1 ($\theta = \underline{\underline{0}}$)

$$a = 1, b = -1 \text{ より } r = \sqrt{2}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ より } \alpha = -\frac{\pi}{4}.$$

$$y = \sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right). \quad 0 \leq \theta \leq \pi \text{ のとき } -\frac{\pi}{4} \leq \theta - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$$

この範囲に $\frac{\pi}{2}$ (sinの頂点) が含まれる ($-\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{4}$) ので、そこが最大： $\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ より $\theta = \frac{3\pi}{4}$ 、 $y = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2} = \sqrt{2}$

両端を比べる： $\sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 、 $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。小さいのは左端 $-\frac{\pi}{4}$ ($\theta = 0$) の方なので、そこが最小： $y = \sqrt{2} \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1$

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \text{ で最大値 } \sqrt{2}, \theta = 0 \text{ で最小値 } -1$$

$\sin 110^\circ \cos 20^\circ - \cos 110^\circ \sin 20^\circ$ の値を求めよ。

値 1

式の形が $\sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin(A - B)$ (加法定理の右辺) と一致していることに気づくのがポイント。 $A = 110^\circ$, $B = 20^\circ$ として逆向きに使う。

$$\sin 110^\circ \cos 20^\circ - \cos 110^\circ \sin 20^\circ = \sin(110^\circ - 20^\circ) = \sin 90^\circ = 1$$

1

$\cos 2\theta - 3\sin \theta + 1 = 0$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を満たす θ をすべて求めよ。小さい順に
コンマ区切りで入力せよ。

$$\theta = \underline{\pi/6, 5\pi/6}$$

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$ を代入する。

$$1 - 2\sin^2 \theta - 3\sin \theta + 1 = 0$$

$$-2\sin^2 \theta - 3\sin \theta + 2 = 0$$

$$\text{両辺に}-1\text{をかけて} 2\sin^2 \theta + 3\sin \theta - 2 = 0$$

$$(2\sin \theta - 1)(\sin \theta + 2) = 0$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \text{ または } \sin \theta = -2$$

$\sin \theta = -2$ は $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ の範囲から外れるので**解として不適**（捨てる）。

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \text{ を満たすのは } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad (\sin \theta = -2 \text{ は解なしとして除外する})$$

$\sin \theta = \frac{3}{5}$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) のとき、 $\cos 2\theta$ の値と、 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ の値をそれぞれ求めよ。

$$\cos 2\theta = \underline{\underline{7/25}} \quad \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \underline{\underline{(3\sqrt{3}+4)/10}}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ （第1象限）なので $\cos \theta > 0$ 。

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

2倍角の公式より

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = 1 - 2 \cdot \frac{9}{25} = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$$

加法定理より

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \theta \cos \frac{\pi}{6} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{6} = \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{10} + \frac{4}{10} = \frac{3\sqrt{3} + 4}{10}$$

$$\cos 2\theta = \frac{7}{25}, \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3} + 4}{10}$$

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1 三角関数の学習は、単位円による $\sin \cdot \cos \cdot \tan$ の定義（一般角）を出発点に、グラフ、加法定理、2倍角・半角・合成、方程式・不等式までが、すべて「単位円」という1つの土台の上でつながっている。加法定理が単位円上の2点間の距離を2通りに測ることで証明されることも踏まえ、なぜ単位円がこの章全体の基礎になっているのかを説明せよ。

まず出発点となる定義そのものが単位円に立脚している。始線から角 θ だけ回転させた動径と単位円の交点 P の座標を $(\cos \theta, \sin \theta)$ と定めるのが本章の定義であり、 $\tan \theta$ もその比 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ として決まる。この定義があるからこそ、 90° を超える角や負の角でも $\sin \cdot \cos \cdot \tan$ が矛盾なく決まる。

グラフも同じ定義の延長線上にある。 θ を増やしながら単位円上の点 P を反時計回りにたどり、その y 座標（または x 座標）の変化をそのまま横に伸ばしたものが $y = \sin \theta$ （または $y = \cos \theta$ ）のグラフであり、1周（ 2π ）で同じ形が繰り返されることも、単位円を1周したら同じ点に戻ることからそのまま説明できる。

加法定理は、単位円上の2点 $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ 、 $Q(\cos \beta, \sin \beta)$ の間の距離 PQ を、座標の距離公式と、二等辺三角形 OPQ （ $OP=OQ=1$ 、 $\angle POQ = \alpha - \beta$ ）に余弦定理を使う方法の2通りで計算し、それらが等しいと置くことで導かれる。つまり加法定理そのものが「単位円上の2点の位置関係」を式にしたものである。

2倍角の公式は加法定理に $\beta = \alpha$ を代入しただけ、半角の公式はさらにその θ を $\frac{\theta}{2}$ に置きかえただけであり、どちらも新しい図形的な仕組みを必要とせず、加法定理——ひいては単位円——の中にすでに含まれている。三角関数の合成も、 $\left(\frac{a}{r}, \frac{b}{r}\right)$ という単位円上の点が表す角を α と定めることで加法定理を逆向きに使う技術であり、やはり単位円上の点として α を決めている。

最後に方程式・不等式についても、 $\sin \theta = k$ や $\cos \theta = k$ を解くとは、単位円上で y 座標（または x 座標）が k になる点を探す作業そのものであり、不等式はその点によって単位円が分けられる弧のどちら側かを判定する作業にすぎない。

このように、本章で学んだ定義・グラフ・加法定理・2倍角・半角・合成・方程式のすべてが、共通して「単位円上の点の座標」という同じ土俵の上で説明できる。だからこそ単位円は、公式を個別に丸暗記するのではなく、忘れても自分で導き直すための共通の出発点として、この章全体の基礎になっている。

$\sin \cdot \cos \cdot \tan$ の定義そのものが単位円上の点の座標であり、グラフ・加法定理（単位円上の2点間の距離の計算）・2倍角/半角（加法定理の言い換え）・合成（単位円上の点で決まる角 α ）・方程式（単位円上で座標が k になる点を探す作業）のすべてが、共通してこの同じ単位円の上で説明できるため、単位円が章全体の基礎になっている。

記2 $y = 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) について、この式を2倍角の公式で書きかえたうえで合成し、 y の最大値・最小値を求めよ。どの公式をどの順番で使ったかが分かるように記述せよ。

まず、2倍角の公式でこの式を書きかえる。 $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$ 、 $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$ （どちらも加法定理に $\beta = \alpha = \theta$ を代入して得られる2倍角の公式そのもの）なので

$$y = \sin 2\theta + \cos 2\theta$$

と書きかえられる。

次に、この式を三角関数の合成で1本の $\sin$ にまとめる。 2θ をひとかたまりの角とみなすと、 $a = 1$ ($\sin 2\theta$ の係数)、 $b = 1$ ($\cos 2\theta$ の係数) なので $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

。 $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 、 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす角は $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 。よって

$$y = \sqrt{2} \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

最後に、 θ の範囲から $2\theta + \frac{\pi}{4}$ の範囲を求める。 $0 \leq \theta < 2\pi$ より 2θ は $0 \leq 2\theta < 4\pi$ 、つまり $\frac{\pi}{4} \leq 2\theta + \frac{\pi}{4} < 4\pi + \frac{\pi}{4}$ となる。この範囲は幅がちょうど 4π 、すなわち $\sin$ の周期 2π のちょうど2周期分にあたるので、 $\sin \left(2\theta + \frac{\pi}{4} \right)$ は範囲の途中で必ず最大値1と最小値 -1 の両方をとる（1周期分だけでもすでに山と谷を1回ずつ通過するので、2周期あれば確実に両方通る）。

したがって y の最大値は $\sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$ 、最小値は $\sqrt{2} \times (-1) = -\sqrt{2}$ 。

（参考：最初に最大になるのは $2\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ より $\theta = \frac{\pi}{8}$ のとき、最初に最小になるのは $2\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$ より $\theta = \frac{5\pi}{8}$ のとき。）

2倍角の公式で $y = \sin 2\theta + \cos 2\theta$ に書きかえ、 2θ を1つの角とみて合成すると $y = \sqrt{2} \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{4} \right)$ 。 θ の範囲が $\sin$ の2周期分に相当するため最大値・最小値は必ず両方とも現れ、最大値 $\sqrt{2}$ 、最小値 $-\sqrt{2}$ 。

EXAM

共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 8分/配点 20点

花子さんと太郎さんは、遊園地の観覧車のゴンドラの高さについて話している。ゴンドラが動き始めてから θ ラジアン回転したときの、ゴンドラの地上からの高さ y (m) は、 $y = 6 \sin \theta + 6\sqrt{3} \cos \theta + 16$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) で近似できるとする。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

太郎「 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ が両方入っているから、まず合成して1本の $\sin$ にまとめよう。」
花子「 $a \sin \theta + b \cos \theta = r \sin(\theta + \alpha)$ の形だね。」

- (1) $6 \sin \theta + 6\sqrt{3} \cos \theta$ を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形すると、 $r = \boxed{\text{アイ}}$ 、 $\alpha = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \pi$ ($0 \leq \alpha < 2\pi$) となる。アイ、ウ、エの値を求めよ。

アイ 12 ウ 1 エ 3

$$a = 6, b = 6\sqrt{3} \text{より } r = \sqrt{6^2 + (6\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 + 108} = \sqrt{144} = 12$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{r} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \sin \alpha = \frac{b}{r} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{を満たす角は } \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{よって } y = 12 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) + 16$$

$$r = 12, \alpha = \frac{\pi}{3}$$

- (2) このとき、 y の最大値・最小値と、それぞれのときの θ を求めよ。最大値は

$$\boxed{\text{オカ}} \text{ m } (\theta = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \pi), \text{ 最小値は } \boxed{\text{ケ}} \text{ m } (\theta = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \pi) \text{ である。}$$

最大値 オカ = 28 キ/ク = 1 / 6 最小値 ケ = 4 コ/サ = 7 / 6

(1)より $y = 12 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + 16$ 。 θ に範囲の制限がない ($0 \leq \theta < 2\pi$ は角の1周分なので $\sin$ は全範囲の値をとる) ので、 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ は -1 から 1 まですべての値をとる。

最大値は $12 \times 1 + 16 = 28$ 、最小値は $12 \times (-1) + 16 = 4$ 。

最大になるのは $\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ のとき： $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

最小になるのは $\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$ のとき： $\theta = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき最大値28m、 $\theta = \frac{7\pi}{6}$ のとき最小値4m

(3) 花子「観覧車が半周する間 ($0 \leq \theta \leq \pi$) で考えてみよう。」

ゴンドラの高さが22m以上になるのは、 $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で θ がどのような範囲

にあるときか求めると、 $0 \leq \theta \leq \frac{\text{シ}}{\text{ス}}\pi$ である。

シ 1 ス 2

$y \geq 22$ を(1)の結果で考える。

$$12 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + 16 \geq 22$$

$$12 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \geq 6$$

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \theta + \frac{\pi}{3} \text{とおく。} 0 \leq \theta \leq \pi \text{より} \frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{4\pi}{3}$$

$\sin \varphi \geq \frac{1}{2}$ となるのは一般に $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}$ 。これと $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{4\pi}{3}$ の共通範囲をとると、下端は $\frac{\pi}{3}$ ($\frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{6}$ なので)、上端は $\frac{5\pi}{6}$ ($\frac{5\pi}{6} < \frac{4\pi}{3}$ なので) となり、 $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}$ 。

$$\theta = \varphi - \frac{\pi}{3} \text{で戻すと、} 0 \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

太郎さんは、加法定理と2倍角の公式を組み合わせて値を求める練習をしている。 θ の動径が第2象限にあり、 $\sin \theta = \frac{4}{5}$ であるとする。次の問いに答えよ。

(1)

$\cos \theta$ の値を求めよ。 $\cos \theta = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ (アに符号もつけて入力せよ)。

ア -3 イ 5

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より $\cos^2 \theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$ 、よって $\cos \theta = \pm \frac{3}{5}$ 。
 θ の動径は第2象限にあるので $\cos \theta < 0$ 、したがって $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ 。

$$\cos \theta = -\frac{3}{5}$$

(2)

2倍角の公式を用いて、 $\sin 2\theta$ 、 $\cos 2\theta$ の値を求めよ。 $\sin 2\theta = \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ 、

$\cos 2\theta = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ (ウエ、キは符号もつけて入力せよ)。

ウエ/オカ = -24 / 25 キ/クケ = -7 / 25

(1)の結果 $\sin \theta = \frac{4}{5}$ 、 $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ を2倍角の公式に代入する。

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 1 - 2 \cdot \frac{16}{25} = 1 - \frac{32}{25} = -\frac{7}{25}$$

(検算： $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2 \cdot \frac{9}{25} - 1 = \frac{18}{25} - 1 = -\frac{7}{25}$ で一致)

$$\sin 2\theta = -\frac{24}{25}, \cos 2\theta = -\frac{7}{25}$$

(3)

(1)(2)の結果を利用して、 $\cos \left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ の値を求めよ。

値 (24√3-7)/50

加法定理 $\cos(2\theta + \alpha) = \cos 2\theta \cos \alpha - \sin 2\theta \sin \alpha$ に $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 、そして(2)で求めた $\sin 2\theta = -\frac{24}{25}$ 、 $\cos 2\theta = -\frac{7}{25}$ を代入する。

$$\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2\theta \cos \frac{\pi}{3} - \sin 2\theta \sin \frac{\pi}{3} = \left(-\frac{7}{25}\right) \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{24}{25}\right) \cdot$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \\ = -\frac{7}{50} + \frac{24\sqrt{3}}{50} = \frac{24\sqrt{3} - 7}{50}$$

$$\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{24\sqrt{3} - 7}{50}$$