

等式・不等式の証明

問題プリント（全24問）

氏名 _____

得点 _____ / 24点

DRILL

練習問題（全15問）

基本（1～6）

1 等式の証明・展開して比べる

$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ であることを証明せよ。

2 相加相乗・基本形

$a > 0$ のとき、 $a + \frac{1}{a}$ の最小値を求めよ。

最小値 そのとき $a =$

3 相加相乗・分子を変える

$a > 0$ のとき、 $a + \frac{4}{a}$ の最小値を求めよ。

最小値 そのとき $a =$

4 不等式の証明・平方完成

すべての実数 x について $x^2 + 4 \geq 4x$ であることを証明せよ。

5 相加相乗・分母が違う数

$b > 0$ のとき、 $b + \frac{16}{b}$ の最小値を求めよ。

最小値 そのとき $b =$

6 条件つき等式・和と積の公式

$x + y = 5$, $xy = 6$ のとき、 $x^2 + y^2$ の値を求めよ。

$x^2 + y^2 =$

標準（7～13）

7 $x > 0$ のとき、 $x + \frac{9}{x} + 5$ の最小値を求めよ。

最小値 そのとき $x =$

8 $x > 0$ のとき、 $4x + \frac{9}{x}$ の最小値を求めよ。

最小値 そのとき $x =$

9 実数 a, b について $a^2 + b^2 \geq 2(a+b) - 2$ であることを証明せよ。

10 $a > 0$ のとき、 $2a + \frac{8}{a}$ の最小値を求めよ。

最小値 そのとき $a =$

11 $a + b = 8$, $ab = 15$ のとき、 $(a-b)^2$ の値を求めよ。

$(a-b)^2 =$

12

文章題：長方形の周の長さ

面積が 16 cm^2 の長方形がある。縦の長さを $a \text{ cm}$ ($a > 0$) とするとき、周の長さ L の最小値を求めよ。

最小値 $L =$ そのとき $a =$

13

不等式の証明・式の大小比較（差の正負判定）

a を実数とすると、 $2a + 3$ と $a^2 + 2$ はどちらが大きいか、差を計算して調べよ。

$a^2 + 2 = 2a + 3$ となる a

の値のうち大きい方は $a =$

挑戦 (14~16)

14

相加相乗を条件式に使う

正の数 a, b が $ab = 4$ を満たすとき、 $a + b$ の最小値を求めよ。

最小値 そのとき $a = b =$

15

条件つき等式・文字消去

$a + b + c = 0$ のとき、 $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$ であることを証明せよ。

16

3文字の不等式・2乗の和

実数 a, b, c について $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ であることを証明せよ。

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。式を少し変形してから相加相乗を使う問題や、条件つきの本格的な証明に挑戦しよう。

応1

置き換えてから相加相乗

$x > 1$ のとき、 $x + \frac{4}{x-1}$ の最小値を求めよ。

最小値 そのとき $x =$

応2

条件つき証明・相加相乗を逆向きに使う

$a > 0, b > 0, a + b = 1$ のとき、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$ であることを証明せよ。

応3

条件つき証明・ $a^2+b^2 \geq 2ab$ の応用

実数 x, y が $x^2 + y^2 = 1$ を満たすとき、 $x + y \leq \sqrt{2}$ であることを証明せよ。

等号が成り立つとき $x = y =$

応4

文章題：面積一定・周の長さ最小

面積が 100 m^2 の長方形の土地がある。縦の長さを $a \text{ m}$ ($a > 0$) とするとき、周の長さ L の最小値を求めよ。

最小値 $L =$ そのとき $a =$

応5

コーシー・シュワルツの不等式の証明

実数 a, b, x, y について $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ であることを証明せよ。

応6

絶対値の不等式・STEP4の結果の応用

実数 a, b について $|a - b| \geq |a| - |b|$ であることを証明せよ。

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1 不等式 $A \geq B$ を証明するとき、なぜ「差 $A - B$ を計算し、それが0以上であることを示す」という方針で証明ができたことになるのかを、実数の性質に触れながら説明せよ。また、相加平均・相乗平均の関係 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ を使う証明で、なぜ「 $a > 0, b > 0$ 」の確認と「等号が成り立つ条件」を必ず書く必要があるのかにも触れよ。

記2 $a > 0$ のとき、 $a + \frac{25}{a}$ の最小値を求めよ。相加平均・相乗平均の関係をうい、根拠を示しながら記述せよ。
