

等式・不等式の証明

解答（全20問）

氏名 _____

得点 _____ / 20点

DRILL

練習問題（全15問）

基本（1～6）

1

等式の証明・展開して比べる

$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ であることを証明せよ。

左辺を展開する。

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2) = 2a^2 + 2b^2 = 2(a^2 + b^2)$$

よって $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ が成り立つ。

2

相加相乗・基本形

$a > 0$ のとき、 $a + \frac{1}{a}$ の最小値を求めよ。

最小値 2 そのとき $a =$ 1

$a > 0$ より $\frac{1}{a} > 0$ 。相加平均・相乗平均の関係より

$$a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2\sqrt{1} = 2$$

等号は $a = \frac{1}{a}$ 、つまり $a^2 = 1$ 、 $a > 0$ より $a = 1$ のとき。

$a = 1$ のとき最小値 2

3

相加相乗・分子を変える

$a > 0$ のとき、 $a + \frac{4}{a}$ の最小値を求めよ。

最小値 4 そのとき $a =$ 2

$$a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{4}{a}} = 2\sqrt{4} = 4$$

等号は $a = \frac{4}{a}$ 、つまり $a^2 = 4$ 、 $a > 0$ より $a = 2$ のとき。

$a = 2$ のとき最小値 4

4

不等式の証明・平方完成

すべての実数 x について $x^2 + 4 \geq 4x$ であることを証明せよ。

差をとる。

$$(x^2 + 4) - 4x = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0$$

よって $x^2 + 4 \geq 4x$ 。等号は $x - 2 = 0$ 、つまり $x = 2$ のとき。

$$x^2 + 4 \geq 4x \text{ (等号は } x = 2 \text{ のとき)}$$

5

相加相乗・分母が違う数

$b > 0$ のとき、 $b + \frac{16}{b}$ の最小値を求めよ。

最小値 8 そのとき $b =$ 4

$$b + \frac{16}{b} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{16}{b}} = 2\sqrt{16} = 8$$

等号は $b = \frac{16}{b}$ 、つまり $b^2 = 16$ 、 $b > 0$ より $b = 4$ のとき。

$b = 4$ のとき最小値 8

6

条件つき等式・和と積の公式

$x + y = 5$, $xy = 6$ のとき、 $x^2 + y^2$ の値を求めよ。

$$x^2 + y^2 = \underline{13}$$

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ という等式を使う（右辺を展開すると $x^2 + 2xy + y^2 - 2xy = x^2 + y^2$ となり、確かに左辺と一致する等式）。

$$x^2 + y^2 = 5^2 - 2 \cdot 6 = 25 - 12 = 13$$

$$x^2 + y^2 = 13$$

標準 (7~12)

- 7 $x > 0$ のとき、 $x + \frac{9}{x} + 5$ の最小値を求めよ。

最小値 11 そのとき $x =$ 3

定数の $+5$ は最小値を考えるときそのまま足しておけばよい。

$$x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{9}{x}} = 2\sqrt{9} = 6 \quad (\text{等号は } x = \frac{9}{x} \text{ より } x^2 = 9, x > 0 \text{ から } x = 3)$$

$$\text{よって } x + \frac{9}{x} + 5 \geq 6 + 5 = 11.$$

$x = 3$ のとき最小値 11

- 8 $x > 0$ のとき、 $4x + \frac{9}{x}$ の最小値を求めよ。

最小値 12 そのとき $x =$ 3/2

2つの項 $4x$ と $\frac{9}{x}$ に相加平均・相乗平均の関係を使う (どちらも $x > 0$ のとき正)。

$$4x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{4x \cdot \frac{9}{x}} = 2\sqrt{36} = 12$$

等号は $4x = \frac{9}{x}$ のとき。両辺に x をかけて $4x^2 = 9$ 、 $x^2 = \frac{9}{4}$ 、 $x > 0$ より $x = \frac{3}{2}$ 。

$x = \frac{3}{2}$ のとき最小値 12

9 実数 a, b について $a^2 + b^2 \geq 2(a + b) - 2$ であることを証明せよ。

差をとる。

$$\{a^2 + b^2\} - \{2(a + b) - 2\} = a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2$$

a, b それぞれについて平方完成する。

$$= (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) = (a - 1)^2 + (b - 1)^2$$

2乗の和なので $(a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geq 0$ 。よって $a^2 + b^2 - 2(a + b) + 2 \geq 0$ 、すなわち $a^2 + b^2 \geq 2(a + b) - 2$ 。

等号は $a - 1 = 0$ かつ $b - 1 = 0$ 、つまり $a = b = 1$ のとき。

$$a^2 + b^2 \geq 2(a + b) - 2 \text{ (等号は } a = b = 1 \text{ のとき)}$$

10 $a > 0$ のとき、 $2a + \frac{8}{a}$ の最小値を求めよ。

最小値 8 そのとき $a = \underline{2}$

$$2a + \frac{8}{a} \geq 2\sqrt{2a \cdot \frac{8}{a}} = 2\sqrt{16} = 8$$

等号は $2a = \frac{8}{a}$ のとき。両辺に a をかけて $2a^2 = 8$ 、 $a^2 = 4$ 、 $a > 0$ より $a = 2$ 。

$a = 2$ のとき最小値 8

11 $a + b = 8$, $ab = 15$ のとき、 $(a - b)^2$ の値を求めよ。

$$(a - b)^2 = \underline{4}$$

$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$ という等式を使う（右辺を展開すると $a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ となり左辺と一致する）。

$$(a - b)^2 = 8^2 - 4 \cdot 15 = 64 - 60 = 4$$

$$(a - b)^2 = 4$$

面積が 16 cm^2 の長方形がある。縦の長さを $a \text{ cm}$ ($a > 0$) とするとき、周の長さ L の最小値を求めよ。

最小値 $L = \underline{16}$ そのとき $a = \underline{4}$

横の長さは $\frac{16}{a} \text{ cm}$ 。周の長さは $L = 2 \left(a + \frac{16}{a} \right)$ 。

$a + \frac{16}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{16}{a}} = 2\sqrt{16} = 8$ (等号は $a = \frac{16}{a}$ より $a^2 = 16$, $a > 0$ から $a = 4$)

よって $L \geq 2 \times 8 = 16$ 。 $a = 4$ のとき横も $\frac{16}{4} = 4$ となり正方形になる。

$a = 4$ のとき周の長さの最小値 16 cm

挑戦 (13~15)

正の数 a, b が $ab = 4$ を満たすとき、 $a + b$ の最小値を求めよ。

最小値 $\underline{4}$ そのとき $a = b = \underline{2}$

$a > 0, b > 0$ なので相加平均・相乗平均の関係が使える。

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{4} = 4$$

等号は $a = b$ のとき。これと $ab = 4$ を連立すると $a^2 = 4$ 、 $a > 0$ より $a = 2$ 、よって $b = 2$ 。

実際に $a = b = 2$ を代入すると $a + b = 4$ となり最小値が実現できることも確認できる。

$a = b = 2$ のとき最小値 4

$a + b + c = 0$ のとき、 $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$ であることを証明せよ。

条件式から $c = -(a + b)$ として消去する。

$$\text{左辺: } a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + (a + b)^2 = a^2 + b^2 + a^2 + 2ab + b^2 = 2a^2 + 2ab + 2b^2$$

$$\begin{aligned} \text{右辺: } bc + ca &= c(a + b) = -(a + b)(a + b) = -(a + b)^2 \text{ なので} \\ -2(ab + bc + ca) &= -2\{ab - (a + b)^2\} = -2ab + 2(a + b)^2 = -2ab + 2a^2 + 4ab + 2b^2 = 2a^2 + 2ab + 2b^2 \end{aligned}$$

左辺・右辺がどちらも $2a^2 + 2ab + 2b^2$ になった。

よって $a + b + c = 0$ のとき $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$ が成り立つ。

実数 a, b, c について $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ であることを証明せよ。

両辺を2倍してから差をとる (2倍しても大小関係は変わらない)。

$$\begin{aligned} &2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) \\ &= (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \\ &= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \end{aligned}$$

3つの2乗の和なので $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$ 。

よって $2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) \geq 0$ 、両辺を2で割って $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ 。

等号は $a - b = 0, b - c = 0, c - a = 0$ が同時に成り立つとき、つまり $a = b = c$ のとき。

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (等号は $a = b = c$ のとき)

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。式を少し変形してから相加相乗を使う問題や、条件付きの本格的な証明に挑戦しよう。

応1

置き換えてから相加相乗

$x > 1$ のとき、 $x + \frac{4}{x-1}$ の最小値を求めよ。

最小値 5 そのとき $x =$ 3

$x - 1$ のかたまりが分母にあるので、 $t = x - 1$ とおく ($x > 1$ より $t > 0$)。 $x = t + 1$ なので

$$x + \frac{4}{x-1} = (t+1) + \frac{4}{t} = \left(t + \frac{4}{t}\right) + 1$$

$t > 0$ なので相加平均・相乗平均の関係より

$$t + \frac{4}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{4}{t}} = 2\sqrt{4} = 4$$

等号は $t = \frac{4}{t}$ より $t^2 = 4$, $t > 0$ から $t = 2$ 。このとき $x = t + 1 = 3$ 。

よって $x + \frac{4}{x-1} \geq 4 + 1 = 5$ 。

$x = 3$ のとき最小値 5

$a > 0, b > 0, a + b = 1$ のとき、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$ であることを証明せよ。

左辺を通分する。

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{ab} \quad (\text{条件 } a+b=1 \text{ を使った})$$

そこで ab の範囲を調べる。 $a > 0, b > 0$ なので相加平均・相乗平均の関係より

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \text{ 条件 } a + b = 1 \text{ を代入して } 1 \geq 2\sqrt{ab}, \text{ よって } \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}.$$

両辺とも0以上なので2乗しても不等号の向きは変わらず $ab \leq \frac{1}{4}$ 。

$ab > 0$ かつ $ab \leq \frac{1}{4}$ なので、逆数をとると不等号の向きが反転して $\frac{1}{ab} \geq 4$ 。

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{ab} \geq 4 \quad (\text{等号は } a = b = \frac{1}{2} \text{ のとき})$$

実数 x, y が $x^2 + y^2 = 1$ を満たすとき、 $x + y \leq \sqrt{2}$ であることを証明せよ。

等号が成り立つとき $x = y = \underline{\sqrt{2}/2}$

$(x + y)^2$ を計算し、条件式を使う。

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = (x^2 + y^2) + 2xy = 1 + 2xy$$

STEP2の例題2の不等式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ を $a = x, b = y$ として使うと $x^2 + y^2 \geq 2xy$ 、条件より $1 \geq 2xy$ 、すなわち $2xy \leq 1$ 。

これを代入して $(x + y)^2 = 1 + 2xy \leq 1 + 1 = 2$ 。

$(x + y)^2 \leq 2$ より $-\sqrt{2} \leq x + y \leq \sqrt{2}$ 。特に $x + y \leq \sqrt{2}$ が成り立つ。

等号が成り立つのは $2xy = 1$ かつ $x^2 + y^2 \geq 2xy$ の等号、つまり $x = y$ のとき。

これと $x^2 + y^2 = 1$ を連立すると $2x^2 = 1$ 、 $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。 $x + y$ を最大にするのは

正の方なので $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

$x + y \leq \sqrt{2}$ (等号は $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき)

面積が 100 m^2 の長方形の土地がある。縦の長さを $a \text{ m}$ ($a > 0$) とするとき、周の長さ L の最小値を求めよ。

最小値 $L = \underline{40}$ そのとき $a = \underline{10}$

横の長さは $\frac{100}{a} \text{ m}$ 。周の長さは $L = 2 \left(a + \frac{100}{a} \right)$ 。

$a > 0$ より $\frac{100}{a} > 0$ なので

$$a + \frac{100}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{100}{a}} = 2\sqrt{100} = 20$$

等号は $a = \frac{100}{a}$ より $a^2 = 100$, $a > 0$ から $a = 10$ (このとき横も 10 m で正方形)。

よって $L \geq 2 \times 20 = 40$ 。

$a = 10$ のとき周の長さの最小値 40 m

実数 a, b, x, y について $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ であることを証明せよ。

差をとって展開する。

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2$$

左の積を展開すると $a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2$ 。

右の2乗を展開すると $(ax + by)^2 = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$ 。

差をとると

$$(a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2) - (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2) = a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2$$

これは $(ay - bx)^2$ の展開形とちょうど一致する $((ay - bx)^2 = a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2)$ 。

実数の2乗は必ず0以上なので $(ay - bx)^2 \geq 0$ 。よって

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 \geq 0$$

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2 \quad (\text{等号は } ay = bx \text{ のとき})$$