

恒等式

解答（全21問）

氏名 _____

得点 _____ /21点

DRILL

練習問題（全16問）

基本（1～6）

1

係数比較（展開して比較）

$x^2 + ax + b = (x + 2)(x - 5)$ が恒等式となるとき、 a, b の値を求めよ。

$a = \underline{-3}$ $b = \underline{-10}$

$$(x + 2)(x - 5) = x^2 - 5x + 2x - 10 = x^2 - 3x - 10$$

係数比較より $a = -3, b = -10$ 。

$$a = -3, b = -10$$

2

係数比較 (xの係数が-a)

$x^2 - ax + b = (x - 3)(x - 4)$ が恒等式となるとき、 a, b の値を求めよ。

$$a = \underline{7} \quad b = \underline{12}$$

$$(x - 3)(x - 4) = x^2 - 7x + 12$$

係数比較より $-a = -7$ なので $a = 7, b = 12$ 。

$$a = 7, b = 12$$

3

展開してから比較 (3つの係数)

$ax^2 + bx + c = 3(x + 1)^2$ が恒等式となるとき、 a, b, c の値を求めよ。

$$a = \underline{3} \quad b = \underline{6} \quad c = \underline{3}$$

$$3(x + 1)^2 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3x^2 + 6x + 3$$

係数比較より $a = 3, b = 6, c = 3$ 。

$$a = 3, b = 6, c = 3$$

4

展開してから比較

$ax^2 + bx + c = (x - 1)(2x + 3)$ が恒等式となるとき、 a, b, c の値を求めよ。

$$a = \underline{2} \quad b = \underline{1} \quad c = \underline{-3}$$

$$(x - 1)(2x + 3) = 2x^2 + 3x - 2x - 3 = 2x^2 + x - 3$$

係数比較より $a = 2, b = 1, c = -3$ 。

$$a = 2, b = 1, c = -3$$

5

展開してから比較（上に凸の形）

$ax^2 + bx + c = -2(x - 2)^2 + 5$ が恒等式となるとき、 a, b, c の値を求めよ。

$$a = \underline{-2} \quad b = \underline{8} \quad c = \underline{-3}$$

$$-2(x - 2)^2 + 5 = -2(x^2 - 4x + 4) + 5 = -2x^2 + 8x - 8 + 5 = -2x^2 + 8x - 3$$

係数比較より $a = -2, b = 8, c = -3$ 。

$$a = -2, b = 8, c = -3$$

6

左辺を展開してから比較

$a(x + 1)^2 + b = x^2 + 2x + 4$ が恒等式となるとき、 a, b の値を求めよ。

$$a = \underline{1} \quad b = \underline{3}$$

$$\text{左辺を展開する：} a(x + 1)^2 + b = a(x^2 + 2x + 1) + b = ax^2 + 2ax + (a + b)$$

右辺 $x^2 + 2x + 4$ と係数比較：

$$x^2 \text{の係数：} a = 1$$

$$x \text{の係数：} 2a = 2 \quad (a = 1 \text{と一致・確認OK})$$

$$\text{定数項：} a + b = 4 \text{ より } 1 + b = 4 \text{ なので } b = 3$$

$$a = 1, b = 3$$

- 7 $a(x-2) + b(x-1) = x+1$ が恒等式となるとき、 a, b の値を求めよ。

$$a = \underline{-2} \quad b = \underline{3}$$

$x = 1$ を代入: $a(-1) + b(0) = 2$ より $a = -2$

$x = 2$ を代入: $a(0) + b(1) = 3$ より $b = 3$

確認: $a(x-2) + b(x-1) = -2(x-2) + 3(x-1) = -2x + 4 + 3x - 3 = x + 1$ となり右辺と一致。

$$a = -2, b = 3$$

- 8 $a(x-1)(x-2) + b(x-1) + c = x^2$ が恒等式となるとき、 a, b, c の値を求めよ。

$$a = \underline{1} \quad b = \underline{3} \quad c = \underline{1}$$

$x = 1$ を代入: $a(0)(-1) + b(0) + c = 1$ より $c = 1$

$x = 2$ を代入: $a(1)(0) + b(1) + c = 4$ より $b + c = 4$ 、 $c = 1$ から $b = 3$

$x = 0$ を代入: $a(-1)(-2) + b(-1) + c = 0$ より $2a - b + c = 0$ 、 $b = 3, c = 1$ から $2a - 3 + 1 = 0$ で $a = 1$

【逆確認】 $x = 3$: 左辺 $1 \cdot (2)(1) + 3(2) + 1 = 2 + 6 + 1 = 9$ 、右辺 $3^2 = 9$ で一致。

$$a = 1, b = 3, c = 1$$

- 9 $(x+2)(x^2+bx+c) = x^3+3x^2-4$ が恒等式となるとき、 b, c の値を求めよ。

$$b = \underline{1} \quad c = \underline{-2}$$

左辺を展開する：

$$(x+2)(x^2+bx+c) = x^3+bx^2+cx+2x^2+2bx+2c = x^3+(b+2)x^2+(c+2b)x+2c$$

右辺 x^3+3x^2+0x-4 と係数比較：

$$x^2 \text{ の係数 : } b+2=3 \text{ より } b=1$$

$$\text{定数項 : } 2c=-4 \text{ より } c=-2$$

$$x \text{ の係数の確認 : } c+2b=-2+2=0 \text{ (右辺の } x \text{ の係数 } 0 \text{ と一致)}$$

$$b=1, c=-2$$

- 10 $\frac{5}{x(x+5)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+5}$ が成り立つとき、 a, b の値を求めよ。

$$a = \underline{1} \quad b = \underline{-1}$$

$$\text{両辺に } x(x+5) \text{ をかけて分母を払う : } 5 = a(x+5) + bx$$

$$x=0 : 5 = 5a \text{ より } a=1$$

$$x=-5 : 5 = -5b \text{ より } b=-1$$

$$\text{確認 : } a(x+5) + bx = (x+5) - x = 5 \text{ で左辺の分子と一致。}$$

$$a=1, b=-1$$

11 $\frac{5x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$ が成り立つとき、 a, b の値を求めよ。

$a = \underline{2} \quad b = \underline{3}$

両辺に $(x-1)(x+2)$ をかけて分母を払う： $5x+1 = a(x+2) + b(x-1)$

$x = 1 : 6 = 3a$ より $a = 2$

$x = -2 : -9 = -3b$ より $b = 3$

確認： $a(x+2) + b(x-1) = 2(x+2) + 3(x-1) = 2x+4+3x-3 = 5x+1$ で一致。

$a = 2, b = 3$

12 $ax^2 + bx + c = (x+1)^2 - 2(x+1) + 5$ が恒等式となるとき、 a, b, c の値を求めよ。

$a = \underline{1} \quad b = \underline{0} \quad c = \underline{4}$

右辺を展開する： $(x+1)^2 - 2(x+1) + 5 = x^2 + 2x + 1 - 2x - 2 + 5 = x^2 + 4$

係数比較より $a = 1, b = 0, c = 4$ 。

(数値代入で確かめると) $x = 0$: 右辺 $1 - 2 + 5 = 4$ より $c = 4$ 。 $x = 1$: 右辺 $4 - 4 + 5 = 5$ より $a + b + c = 5$ 。 $x = -1$: 右辺 $0 - 0 + 5 = 5$ より $a - b + c = 5$ 。 $c = 4$ とあわせて解くと $a = 1, b = 0$ で一致。

$a = 1, b = 0, c = 4$

挑戦 (13~16)

13

数値代入法 (因数が0になるxを選ぶ)

$a(x-1)(x+1) + b(x-1) + c = 2x^2 - 3x + 5$ が恒等式となるとき、
 a, b, c の値を求めよ。

$$a = \underline{2} \quad b = \underline{-3} \quad c = \underline{4}$$

$x = 1$ を代入：左辺 c 、右辺 $2 - 3 + 5 = 4$ より $c = 4$

$x = -1$ を代入：左辺 $-2b + c$ 、右辺 $2 + 3 + 5 = 10$ より $-2b + 4 = 10$ で

$$b = -3$$

$x = 0$ を代入：左辺 $-a - b + c$ 、右辺 5 より $-a - (-3) + 4 = 5$ で $-a = -2$ 、
 $a = 2$

【逆確認】 $x = 2$ ：左辺 $2(1)(3) + (-3)(1) + 4 = 6 - 3 + 4 = 7$ 、右辺 $2(4) - 6 + 5 = 7$ で一致。

$$a = 2, b = -3, c = 4$$

$\frac{3x^2 - x - 2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$ が成り立つとき、 a, b, c の値を求めよ。

$$a = \underline{2} \quad b = \underline{0} \quad c = \underline{1}$$

両辺に $x(x-1)(x+1)$ をかけて分母を払う：

$$3x^2 - x - 2 = a(x-1)(x+1) + bx(x+1) + cx(x-1)$$

$$x = 0 : -2 = a(-1)(1) = -a \text{ より } a = 2$$

$$x = 1 : 0 = b(1)(2) = 2b \text{ より } b = 0$$

$$x = -1 : 2 = c(-1)(-2) = 2c \text{ より } c = 1$$

確認： $x = 2$ を代入すると、左辺 $3(4) - 2 - 2 = 8$ 、右辺 $2(1)(3) + 0(2)(3) + 1(2)(1) = 6 + 0 + 2 = 8$ で一致。

$$a = 2, b = 0, c = 1$$

$a(x+2)^2 + b(x+2) + c = 3x^2 + 2x - 1$ が恒等式となるとき、 a, b, c の値を求めよ。

$$a = \underline{3} \quad b = \underline{-10} \quad c = \underline{7}$$

左辺を展開する：

$$a(x+2)^2 + b(x+2) + c = a(x^2 + 4x + 4) + bx + 2b + c = ax^2 + (4a + b)x + (4a + 2b + c)$$

右辺 $3x^2 + 2x - 1$ と係数比較：

$$x^2 \text{の係数} : a = 3$$

$$x \text{の係数} : 4a + b = 2 \text{ より } 12 + b = 2 \text{ で } b = -10$$

$$\text{定数項} : 4a + 2b + c = -1 \text{ より } 12 - 20 + c = -1 \text{ で } c = 7$$

【確認】 $x = -2$: 左辺 $c = 7$ 、右辺 $3(4) + 2(-2) - 1 = 12 - 4 - 1 = 7$ で一致。

$$a = 3, b = -10, c = 7$$

$a(x-1)^2 + b(x-1) + c = 3x^2 - 5x + 4$ が恒等式となるとき、 a, b, c の値を求めよ。

$$a = \underline{3} \quad b = \underline{1} \quad c = \underline{2}$$

左辺を展開する：

$$a(x-1)^2 + b(x-1) + c = a(x^2 - 2x + 1) + bx - b + c = ax^2 + (-2a + b)x + (a - b + c)$$

右辺 $3x^2 - 5x + 4$ と係数比較：

$$x^2 \text{の係数} : a = 3$$

$$x \text{の係数} : -2a + b = -5 \text{ より } -6 + b = -5 \text{ で } b = 1$$

$$\text{定数項} : a - b + c = 4 \text{ より } 3 - 1 + c = 4 \text{ で } c = 2$$

【確認】 $x = 1$: 左辺 $c = 2$ 、右辺 $3 - 5 + 4 = 2$ で一致。

$$a = 3, b = 1, c = 2$$

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。整式の割り算との融合、対称式の恒等式に挑戦しよう。

応1

割り算との融合（余り=0の恒等式）

整式 $x^3 + ax + b$ が $(x - 1)^2$ で割り切れるとき、 a, b の値を求めよ。

$$a = \underline{-3} \quad b = \underline{2}$$

「割り切れる」とは、割り算の余りが0であるということ。 $x^3 + ax + b$ を $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$ で実際に割り算する。

$x^3 + 0x^2 + ax + b$ を $x^2 - 2x + 1$ で割る：

1段目： $x^3 \div x^2 = x$ 。 $x(x^2 - 2x + 1) = x^3 - 2x^2 + x$ 。引くと $2x^2 + (a - 1)x + b$ 。

2段目： $2x^2 \div x^2 = 2$ 。 $2(x^2 - 2x + 1) = 2x^2 - 4x + 2$ 。引くと $(a - 1 + 4)x + (b - 2) = (a + 3)x + (b - 2)$ 。

割り切れる（余りが恒等的に0）ためには、余りの整式 $(a + 3)x + (b - 2)$ が x についての恒等式として0にならなければならない。

x の係数： $a + 3 = 0$ より $a = -3$

定数項： $b - 2 = 0$ より $b = 2$

$$a = -3, b = 2$$

応2

割り算との融合 (2次式で割る)

整式 $2x^3 + ax^2 + bx - 3$ が $(x + 1)(x - 3)$ で割り切れるとき、 a, b の値を求めよ。

$$a = \underline{-3} \quad b = \underline{-8}$$

$(x + 1)(x - 3) = x^2 - 2x - 3$ で割り算する。

$2x^3 + ax^2 + bx - 3$ を $x^2 - 2x - 3$ で割る：

1段目： $2x^3 \div x^2 = 2x$ 。 $2x(x^2 - 2x - 3) = 2x^3 - 4x^2 - 6x$ 。引くと $(a + 4)x^2 + (b + 6)x - 3$ 。

2段目： $(a + 4)x^2 \div x^2 = a + 4$ 。 $(a + 4)(x^2 - 2x - 3) = (a + 4)x^2 - 2(a + 4)x - 3(a + 4)$ 。引くと $\{(b + 6) + 2(a + 4)\}x + \{-3 + 3(a + 4)\}$
 $= (2a + b + 14)x + (3a + 9)$ 。

割り切れるので余りは恒等的に 0。

定数項： $3a + 9 = 0$ より $a = -3$

x の係数： $2a + b + 14 = 0$ より $-6 + b + 14 = 0$ で $b = -8$

$$a = -3, b = -8$$

応3

対称式の恒等式

$x + y = 4$, $xy = 1$ のとき、恒等式 $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ および $(x + y)^3 = x^3 + 3xy(x + y) + y^3$ を利用して、 $x^2 + y^2$ と $x^3 + y^3$ の値を求めよ。

$$x^2 + y^2 = \underline{14} \quad x^3 + y^3 = \underline{52}$$

恒等式 $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ を変形すると $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ 。

$x + y = 4$, $xy = 1$ を代入： $x^2 + y^2 = 4^2 - 2 \cdot 1 = 16 - 2 = 14$

恒等式 $(x + y)^3 = x^3 + 3xy(x + y) + y^3$ を変形すると $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ 。

$x^3 + y^3 = 4^3 - 3 \cdot 1 \cdot 4 = 64 - 12 = 52$

$$x^2 + y^2 = 14, x^3 + y^3 = 52$$

応4

対称式の恒等式 (xyを先に求める)

$x + y = 3$, $x^2 + y^2 = 5$ のとき、恒等式を利用して xy の値と $x^3 + y^3$ の値を求めよ。

$$xy = \underline{2} \quad x^3 + y^3 = \underline{9}$$

恒等式 $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ より $2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2)$ 。

$$2xy = 3^2 - 5 = 9 - 5 = 4 \text{ より } xy = 2$$

恒等式 $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ より

$$x^3 + y^3 = 3^3 - 3 \cdot 2 \cdot 3 = 27 - 18 = 9$$

$$xy = 2, \quad x^3 + y^3 = 9$$

整式 $x^4 + ax + b$ が $(x + 1)^2$ で割り切れるとき、 a, b の値を求めよ。

$$a = \underline{4} \quad b = \underline{3}$$

$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ で割り算する。

$x^4 + 0x^3 + 0x^2 + ax + b$ を $x^2 + 2x + 1$ で割る：

1段目： $x^4 \div x^2 = x^2$ 。 $x^2(x^2 + 2x + 1) = x^4 + 2x^3 + x^2$ 。引くと $-2x^3 - x^2 + ax + b$ 。

2段目： $-2x^3 \div x^2 = -2x$ 。 $-2x(x^2 + 2x + 1) = -2x^3 - 4x^2 - 2x$ 。引くと $3x^2 + (a + 2)x + b$ 。

3段目： $3x^2 \div x^2 = 3$ 。 $3(x^2 + 2x + 1) = 3x^2 + 6x + 3$ 。引くと $(a + 2 - 6)x + (b - 3) = (a - 4)x + (b - 3)$ 。

割り切れるので余りは恒等的に 0。

x の係数： $a - 4 = 0$ より $a = 4$

定数項： $b - 3 = 0$ より $b = 3$

(商は $x^2 - 2x + 3$ となる。検算： $(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x + 3)$ を展開すると $x^4 + 4x + 3$ に一致する。)

$$a = 4, b = 3$$