

# 整式の割り算・分数式

解答（全23問）

氏名 \_\_\_\_\_

得点 \_\_\_\_\_ / 23点

DRILL

## 練習問題（全18問）

### 基本（1～7）

1

整式の割り算（割り切れる）

$x^3 - 5x^2 + 7x - 3$  を  $x - 1$  で割ったときの商を  $ax^2 + bx + c$ 、余りを  $R$  とするとき、 $a, b, c, R$  を求めよ。

$a = \underline{1}$     $b = \underline{-4}$     $c = \underline{3}$     $R = \underline{0}$

筆算で計算する。

$x^3 \div x = x^2$ 、 $x^2(x - 1) = x^3 - x^2$ 、引いて  $-4x^2$ 、 $7x$  をおろして  $-4x^2 + 7x$ 。

$-4x^2 \div x = -4x$ 、 $-4x(x - 1) = -4x^2 + 4x$ 、引いて  $3x$ 、 $-3$  をおろして  $3x - 3$ 。

$3x \div x = 3$ 、 $3(x - 1) = 3x - 3$ 、引いて  $0$ 。

商  $x^2 - 4x + 3$  ( $a = 1, b = -4, c = 3$ )、余り  $R = 0$

2

整式の割り算（余りあり）

$2x^3 + 3x^2 - 4$  を  $x + 2$  で割ったときの商を  $ax^2 + bx + c$ 、余りを  $R$  とするとき、 $a, b, c, R$  を求めよ。

$$a = \underline{2} \quad b = \underline{-1} \quad c = \underline{2} \quad R = \underline{-8}$$

$2x^3 + 3x^2 + 0x - 4$  として筆算する。

$2x^2(x + 2) = 2x^3 + 4x^2$ 、引いて  $-x^2$ 。

$-x(x + 2) = -x^2 - 2x$ 、引いて  $2x$ 。

$2(x + 2) = 2x + 4$ 、引いて  $-8$ 。

商  $2x^2 - x + 2$  ( $a = 2, b = -1, c = 2$ )、余り  $R = -8$

3

割る式が2次式

$x^3 + 2x^2 - x + 5$  を  $x^2 - x + 1$  で割ったときの商を  $px + q$ 、余りを  $rx + s$  とするとき、 $p, q, r, s$  を求めよ。

$$p = \underline{1} \quad q = \underline{3} \quad r = \underline{1} \quad s = \underline{2}$$

$x^3 \div x^2 = x$ 、 $x(x^2 - x + 1) = x^3 - x^2 + x$ 、引いて  $3x^2 - 2x$ 、5をおろして  $3x^2 - 2x + 5$ 。

$3x^2 \div x^2 = 3$ 、 $3(x^2 - x + 1) = 3x^2 - 3x + 3$ 、引いて  $x + 2$ 。次数がBより低いのでここで終了。

商  $x + 3$  ( $p = 1, q = 3$ )、余り  $x + 2$  ( $r = 1, s = 2$ )

4

約分

$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}$  を約分すると  $\frac{ax + b}{cx + d}$  の形になる。 $a, b, c, d$  を求めよ。

$$a = \underline{1} \quad b = \underline{2} \quad c = \underline{1} \quad d = \underline{3}$$

分子： $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$

分母： $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

共通因数  $(x - 3)$  を消す。

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} = \frac{x + 2}{x + 3} \quad (a = 1, b = 2, c = 1, d = 3)$$

5

乗法

$\frac{x + 3}{x - 2} \times \frac{x - 2}{x + 5}$  を計算すると  $\frac{ax + b}{cx + d}$  の形になる。 $a, b, c, d$  を求めよ。

$$a = \underline{1} \quad b = \underline{3} \quad c = \underline{1} \quad d = \underline{5}$$

$(x - 2)$  が分子・分母で共通なので約分できる。

$$\frac{x + 3}{x - 2} \times \frac{x - 2}{x + 5} = \frac{x + 3}{x + 5} \quad (a = 1, b = 3, c = 1, d = 5)$$

6

除法・結果が整式になる

$\frac{x^2 - 4}{x + 3} \div \frac{x - 2}{x + 3}$  を計算すると  $ax + b$  の形になる。 $a, b$  を求めよ。

$$a = \underline{1} \quad b = \underline{2}$$

割る式をひっくり返して掛け算に直す。

$$\frac{x^2 - 4}{x + 3} \times \frac{x + 3}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 3} \times \frac{x + 3}{x - 2}$$

$(x + 3)$  と  $(x - 2)$  が約分できて

$$\frac{x^2 - 4}{x + 3} \div \frac{x - 2}{x + 3} = x + 2 \quad (a = 1, b = 2)$$

$\frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-1}$  を計算すると  $\frac{ax+b}{x^2+cx+d}$  の形になる。 $a, b, c, d$  を求めよ。

$$a = \underline{3} \quad b = \underline{5} \quad c = \underline{2} \quad d = \underline{-3}$$

最小公分母は  $(x+3)(x-1)$ 。

$$\frac{(x-1) + 2(x+3)}{(x+3)(x-1)} = \frac{x-1+2x+6}{(x+3)(x-1)} = \frac{3x+5}{x^2+2x-3}$$

$$\frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-1} = \frac{3x+5}{x^2+2x-3} \quad (a=3, b=5, c=2, d=-3)$$

### 標準 (8~14) ※パターンは自分で判定

整式  $A$  を  $x+2$  で割ると商が  $x^2-3x+5$ 、余りが  $-1$  であるという。 $A = x^3 + ax^2 + bx + c$  とするとき、 $a, b, c$  を求めよ。

$$a = \underline{-1} \quad b = \underline{-1} \quad c = \underline{9}$$

$$A = (x+2)(x^2-3x+5) + (-1)$$

$$(x+2)(x^2-3x+5) = x^3 - 3x^2 + 5x + 2x^2 - 6x + 10 = x^3 - x^2 - x + 10$$

$$A = x^3 - x^2 - x + 10 - 1 = x^3 - x^2 - x + 9$$

$$A = x^3 - x^2 - x + 9 \quad (a=-1, b=-1, c=9)$$

整式  $x^3 - 2x^2 + kx - 6$  が  $x - 3$  で割り切れるとき、定数  $k$  の値と、そのときの商  $x^2 + ax + b$  の  $a, b$  を求めよ。

$$k = \underline{-1} \quad a = \underline{1} \quad b = \underline{2}$$

$x^3 - 2x^2 + kx - 6$  を  $x - 3$  で割ると、商は  $x^2 + x + (k + 3)$ 、余りは  $3k + 3$  になる（実際に筆算すると確かめられる）。

割り切れる条件は  $3k + 3 = 0$  より  $k = -1$ 。

このとき商は  $x^2 + x + 2$  ( $k + 3 = 2$ )。

検算：  $k = -1$  のとき  $x^3 - 2x^2 - x - 6$ 。  $(x - 3)(x^2 + x + 2) = x^3 + x^2 + 2x - 3x^2 - 3x - 6 = x^3 - 2x^2 - x - 6$ 。一致する。

$k = -1$ 、商  $x^2 + x + 2$  ( $a = 1, b = 2$ )

$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \times \frac{x - 2}{x + 1}$  を計算すると  $\frac{ax + b}{cx + d}$  の形になる。 $a, b, c, d$  を求めよ。

$$a = \underline{1} \quad b = \underline{-1} \quad c = \underline{1} \quad d = \underline{2}$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \times \frac{x - 2}{x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 2)(x + 2)} \times \frac{x - 2}{x + 1}$$

$(x + 1)$  と  $(x - 2)$  が約分できて

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \times \frac{x - 2}{x + 1} = \frac{x - 1}{x + 2} \quad (a = 1, b = -1, c = 1, d = 2)$$

11

除法・結果が整式になる

$\frac{x^2 + 2x}{x - 3} \div \frac{x + 2}{x^2 - 9}$  を計算すると  $ax^2 + bx + c$  の形になる。 $a, b, c$  を求めよ。

$$a = \underline{1} \quad b = \underline{3} \quad c = \underline{0}$$

$$\frac{x^2 + 2x}{x - 3} \times \frac{x^2 - 9}{x + 2} = \frac{x(x + 2)}{x - 3} \times \frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 2}$$

$(x - 3)$  と  $(x + 2)$  が約分できて  $x(x + 3) = x^2 + 3x$ 。

$$\frac{x^2 + 2x}{x - 3} \div \frac{x + 2}{x^2 - 9} = x^2 + 3x \quad (a = 1, b = 3, c = 0)$$

12

通分・減法

$\frac{3}{x - 1} - \frac{2}{x + 2}$  を計算すると  $\frac{ax + b}{x^2 + cx + d}$  の形になる。 $a, b, c, d$  を求めよ。

$$a = \underline{1} \quad b = \underline{8} \quad c = \underline{1} \quad d = \underline{-2}$$

最小公分母は  $(x - 1)(x + 2)$ 。

$$\frac{3(x + 2) - 2(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{3x + 6 - 2x + 2}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{x + 8}{x^2 + x - 2}$$

$$\frac{3}{x - 1} - \frac{2}{x + 2} = \frac{x + 8}{x^2 + x - 2} \quad (a = 1, b = 8, c = 1, d = -2)$$

13

同分母の加法

$\frac{x + 1}{x - 2} + \frac{3x - 1}{x - 2}$  を計算すると  $\frac{ax + b}{cx + d}$  の形になる。 $a, b, c, d$  を求めよ。

$$a = \underline{4} \quad b = \underline{0} \quad c = \underline{1} \quad d = \underline{-2}$$

分母が同じなので分子だけ足す。

$$\frac{(x + 1) + (3x - 1)}{x - 2} = \frac{4x}{x - 2}$$

$$\frac{x + 1}{x - 2} + \frac{3x - 1}{x - 2} = \frac{4x}{x - 2} \quad (a = 4, b = 0, c = 1, d = -2)$$

$\frac{2x^2 - x - 1}{2x^2 + x - 3}$  を約分すると  $\frac{ax + b}{cx + d}$  の形になる。 $a, b, c, d$  を求めよ。

$$a = \underline{2} \quad b = \underline{1} \quad c = \underline{2} \quad d = \underline{3}$$

$$\text{分子: } 2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1)$$

$$\text{分母: } 2x^2 + x - 3 = (2x + 3)(x - 1)$$

共通因数  $(x - 1)$  を消す。

$$\frac{2x^2 - x - 1}{2x^2 + x - 3} = \frac{2x + 1}{2x + 3} \quad (a = 2, b = 1, c = 2, d = 3)$$

### 挑戦 (15~18)

整式  $P(x)$  を  $x^2 - 1$  で割ると商が  $x + 2$ 、余りが  $3x + 1$  であるという。

$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  とするとき  $a, b, c$  を求めよ。さらに、この  $P(x)$  を  $x - 1$  で割った余り  $R$  を求めよ (実際に割り算をすること)。

$$a = \underline{2} \quad b = \underline{2} \quad c = \underline{-1} \quad R = \underline{4}$$

$$P(x) = (x^2 - 1)(x + 2) + (3x + 1)$$

$$(x^2 - 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 + 3x + 1 = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

次にこの  $P(x)$  を  $x - 1$  で割る。

$$x^3 \div x = x^2, \quad x^2(x - 1) = x^3 - x^2, \quad \text{引いて } 3x^2, \quad 2x \text{ をおろして } 3x^2 + 2x。$$

$$3x^2 \div x = 3x, \quad 3x(x - 1) = 3x^2 - 3x, \quad \text{引いて } 5x, \quad -1 \text{ をおろして } 5x - 1。$$

$$5x \div x = 5, \quad 5(x - 1) = 5x - 5, \quad \text{引いて } 4。$$

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1 \quad (a = 2, b = 2, c = -1)、x - 1 \text{ で割った余り } R = 4$$

16

通分・減法（分子が2次式になる）

$\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x-1}$  を計算すると  $\frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + d}$  の形になる。 $a, b, c, d$  を求めよ。

$$a = \underline{1} \quad b = \underline{-3} \quad c = \underline{-2} \quad d = \underline{-1}$$

最小公分母は  $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$ 。

$$\frac{x(x-1) - 2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2 - x - 2x - 2}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 3x - 2}{x^2 - 1}$$

分子  $x^2 - 3x - 2$  は  $x = 1, x = -1$  を代入しても0にならない ( $1 - 3 - 2 = -4$ 、 $1 + 3 - 2 = 2$ ) ので、これ以上約分できない。

$$\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x-1} = \frac{x^2 - 3x - 2}{x^2 - 1} \quad (a = 1, b = -3, c = -2, d = -1)$$

17

4次式を2次式で割る

$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5$  を  $(x-1)(x-2)$  で割ったときの商を  $ax^2 + bx + c$ 、余りを  $px + q$  とするとき、 $a, b, c, p, q$  を求めよ。

$$a = \underline{1} \quad b = \underline{0} \quad c = \underline{0} \quad p = \underline{1} \quad q = \underline{-5}$$

割る式は  $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$ 。

$$x^4 \div x^2 = x^2。x^2(x^2 - 3x + 2) = x^4 - 3x^3 + 2x^2。$$

$$\text{これを引くと } (x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5) - (x^4 - 3x^3 + 2x^2) = x - 5。$$

$x - 5$  の次数（1次）は割る式の次数（2次）より低いので、ここで終了。

商  $x^2$  ( $a = 1, b = 0, c = 0$ )、余り  $x - 5$  ( $p = 1, q = -5$ )



$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1} \times \frac{x + 1}{x - 3}$  を計算すると  $\frac{ax + b}{cx + d}$  の形になる。 $a, b, c, d$  を求めよ。

$$a = \underline{1} \quad b = \underline{-2} \quad c = \underline{1} \quad d = \underline{-1}$$

$$\text{分子：} x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

$$\text{分母：} x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$\frac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 1)(x + 1)} \times \frac{x + 1}{x - 3}$$

$(x + 1)$  と  $(x - 3)$  が約分できて

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1} \times \frac{x + 1}{x - 3} = \frac{x - 2}{x - 1} \quad (a = 1, b = -2, c = 1, d = -1)$$

## 応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。部分分数分解や繁分数式など、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

## 応1

部分分数分解の初歩

$\frac{1}{x(x+2)}$  を  $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+2}$  の形に分けたい。 $a, b$  を求めよ。

$$a = \underline{1/2} \quad b = \underline{-1/2}$$

$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2}$  において、右辺を通分すると分子は  $a(x+2) + bx$ 。これが左辺の分子 1（定数）と等しくなるように  $a, b$  を決める。

一番簡単なのは、都合のよい  $x$  の値を代入する方法。

$$x = 0 \text{ を代入: } 1 = a(0+2) + b \cdot 0 = 2a \text{ より } a = \frac{1}{2}$$

$$x = -2 \text{ を代入: } 1 = a(0) + b(-2) = -2b \text{ より } b = -\frac{1}{2}$$

検算:  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+2} = \frac{(x+2) - x}{2x(x+2)} = \frac{2}{2x(x+2)} = \frac{1}{x(x+2)}$ 。一致する。

$$a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$$

## 応2

部分分数分解の応用（和の計算）

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$  という関係を利用して、 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4}$  の値を求めよ。

値 3/4

部分分数分解を使うと、各項が「引き算」の形になって途中の項が打ち消し合う (telescoping)。

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 \cdot 2} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2 \cdot 3} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3 \cdot 4} &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

3つを足すと、 $-\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{2}$ 、 $-\frac{1}{3}$ と $\frac{1}{3}$ が消えて

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

(検算：直接計算すると  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ 。一致する。)

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

## 応3

部分分数分解（分子が定数でない）

$\frac{2x+1}{x(x+1)}$  を  $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$  の形に分けたい。 $a, b$  を求めよ。

$$a = \underline{1} \quad b = \underline{1}$$

右辺を通分すると分子は  $a(x+1) + bx$ 。これが  $2x+1$  と等しくなればよい。

$x = 0$  を代入： $2 \cdot 0 + 1 = 1 = a(0+1) + b \cdot 0 = a$  より  $a = 1$

$x = -1$  を代入： $2(-1) + 1 = -1 = a \cdot 0 + b(-1) = -b$  より  $b = 1$

検算： $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1) + x}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$ 。一致する。

$$a = 1, b = 1$$

応4

繁分数式

$\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$  を簡単にすると  $\frac{ax + b}{cx + d}$  の形になる。 $a, b, c, d$  を求めよ。

$$a = \underline{1} \quad b = \underline{1} \quad c = \underline{1} \quad d = \underline{-1}$$

繁分数式は、まず分子・分母それぞれを1つの分数式にまとめてから、割り算として計算するのがコツ。

$$\begin{aligned} \text{分子: } 1 + \frac{1}{x} &= \frac{x+1}{x} \\ \text{分母: } 1 - \frac{1}{x} &= \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$

$$\text{もとの式は } \frac{x+1}{x} \div \frac{x-1}{x} = \frac{x+1}{x} \times \frac{x}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x+1}{x-1} \quad (a=1, b=1, c=1, d=-1)$$

応5

繁分数式（分子分母がそれぞれ和・差）

$\frac{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}}$  を簡単にすると  $ax$  の形になる。 $a$  を求めよ。

$$a = \underline{-1}$$

分子・分母をそれぞれ通分して1つの分数式にまとめる。

$$\begin{aligned} \text{分子: } \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} &= \frac{(x-1) + (x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{x^2-1} \\ \text{分母: } \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} &= \frac{(x-1) - (x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2}{x^2-1} \end{aligned}$$

$$\text{もとの式は } \frac{2x}{x^2-1} \div \frac{-2}{x^2-1} = \frac{2x}{x^2-1} \times \frac{x^2-1}{-2} = \frac{2x}{-2} = -x$$

$$\text{与式} = -x \quad (a = -1)$$