

3次式の展開・因数分解と二項定理

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ /23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～7）

1

公式1 : $(a + b)^3$

$(x + 3)^3$ を展開せよ。

x^2 の係数 9 x の係数 27 定数項 27

公式1 $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ を $a = x, b = 3$ で使う。

$$x^3 + 3 \times x^2 \times 3 + 3 \times x \times 3^2 + 3^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

$$(x + 3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

2

公式2 : $(a - b)^3$ $(x - 2)^3$ を展開せよ。 x^2 の係数 -6 x の係数 12 定数項 -8公式2 $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ を $a = x, b = 2$ で使う。

$$x^3 - 3 \times x^2 \times 2 + 3 \times x \times 2^2 - 2^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$(x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

3

公式1の一般形（係数が1でない）

 $(2x + 1)^3$ を展開せよ。 x^3 の係数 8 x^2 の係数 12 x の係数 6 定数項 1公式1 $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ を $A = 2x, B = 1$ で使う。

$$(2x)^3 + 3(2x)^2(1) + 3(2x)(1)^2 + 1^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

$$(2x + 1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

4

公式3 : $a^3 + b^3$ の因数分解 $x^3 + 27$ を $(x + A)(x^2 + Bx + C)$ の形に因数分解したとき、 A, B, C の値を求めよ。 $A =$ 3 $B =$ -3 $C =$ 927 = 3³ なので、公式3 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ を $a = x, b = 3$ で使う。

$$x^3 + 3^3 = (x + 3)(x^2 - 3x + 3^2) = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$$

$$A = 3, B = -3, C = 9$$

5

公式4: $a^3 - b^3$ の因数分解

$x^3 - 8$ を $(x - A)(x^2 + Bx + C)$ の形に因数分解したとき、 A, B, C の値を求めよ。

$$A = \underline{2} \quad B = \underline{2} \quad C = \underline{4}$$

$8 = 2^3$ なので、公式4 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ を $a = x, b = 2$ で使う。

$$x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 2^2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$A = 2, B = 2, C = 4$$

6

公式3の一般形 (係数が1でない)

$8x^3 + 1$ を $(2x + A)(Bx^2 + Cx + D)$ の形に因数分解したとき、 A, B, C, D の値を求めよ。

$$A = \underline{1} \quad B = \underline{4} \quad C = \underline{-2} \quad D = \underline{1}$$

$8x^3 = (2x)^3, 1 = 1^3$ なので、公式3 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ を $a = 2x, b = 1$ で使う。

$$(2x)^3 + 1^3 = (2x + 1)\{(2x)^2 - (2x)(1) + 1^2\} = (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$$

$$A = 1, B = 4, C = -2, D = 1$$

$27x^3 - 1$ を $(3x - A)(Bx^2 + Cx + D)$ の形に因数分解したとき、
 A, B, C, D の値を求めよ。

$$A = \underline{1} \quad B = \underline{9} \quad C = \underline{3} \quad D = \underline{1}$$

$27x^3 = (3x)^3$ 、 $1 = 1^3$ なので、公式4 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ を $a = 3x$ 、 $b = 1$ で使う。

$$(3x)^3 - 1^3 = (3x - 1)\{(3x)^2 + (3x)(1) + 1^2\} = (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)$$

$$A = 1, B = 9, C = 3, D = 1$$

標準（8～14） ※一般項を使って係数を求める

8 $(a + b)^7$ の展開における a^4b^3 の項の係数を求めよ。

係数 35

一般項は ${}_7C_r a^{7-r} b^r$ 。 a^4b^3 は $7 - r = 4$ より $r = 3$ 。

$$\text{係数は } {}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35。$$

係数は 35

9 $(x + 1)^6$ の展開における x^3 の項の係数を求めよ。

係数 20

一般項は ${}_6C_r x^{6-r} \times 1^r = {}_6C_r x^{6-r}$ 。 x^3 は $6 - r = 3$ より $r = 3$ 。

$$\text{係数は } {}_6C_3 \times 1^3 = 20 \times 1 = 20。$$

係数は 20

10 $(x - 2)^5$ の展開における x^2 の項の係数を求めよ。

係数 -80

一般項は ${}_5C_r x^{5-r} (-2)^r$ 。 x^2 は $5 - r = 2$ より $r = 3$ 。

係数は ${}_5C_3 \times (-2)^3 = 10 \times (-8) = -80$ 。

係数は -80

11 $(2x + 1)^4$ の展開における x^2 の項の係数を求めよ。

係数 24

一般項は ${}_4C_r (2x)^{4-r} (1)^r = {}_4C_r 2^{4-r} x^{4-r}$ 。 x^2 は $4 - r = 2$ より $r = 2$ 。

係数は ${}_4C_2 \times 2^2 = 6 \times 4 = 24$ 。

係数は 24

12 $(x + 3)^4$ の展開における x の項 (x^1 の項) の係数を求めよ。

係数 108

一般項は ${}_4C_r x^{4-r} 3^r$ 。 x^1 は $4 - r = 1$ より $r = 3$ 。

係数は ${}_4C_3 \times 3^3 = 4 \times 27 = 108$ 。

係数は 108

13

aの部分が x^2 になっている

$(x^2 + 1)^5$ の展開における x^6 の項の係数を求めよ。

係数 10

一般項は ${}_5C_r(x^2)^{5-r}(1)^r = {}_5C_r x^{2(5-r)}$ 。 x^6 は $2(5-r) = 6$ より $5-r = 3$, $r = 2$ 。

係数は ${}_5C_2 = 10$ 。

係数は 10

14 $(3x - 1)^5$ の展開における x^3 の項の係数を求めよ。

係数 270

一般項は ${}_5C_r(3x)^{5-r}(-1)^r = {}_5C_r 3^{5-r}(-1)^r x^{5-r}$ 。 x^3 は $5-r = 3$ より $r = 2$ 。

係数は ${}_5C_2 \times 3^3 \times (-1)^2 = 10 \times 27 \times 1 = 270$ 。

係数は 270

挑戦 (15~18)

15

符号がマイナスになる項

$(x - 1)^7$ の展開における x^4 の項の係数を求めよ。

係数 -35

一般項は ${}_7C_r x^{7-r}(-1)^r$ 。 x^4 は $7-r = 4$ より $r = 3$ 。

係数は ${}_7C_3 \times (-1)^3 = 35 \times (-1) = -35$ 。

係数は -35

16

両方に係数がついている

$(3x - 2)^4$ の展開における x^3 の項の係数を求めよ。

係数 -216

一般項は ${}_4C_r(3x)^{4-r}(-2)^r$ 。 x^3 は $4 - r = 3$ より $r = 1$ 。

係数は ${}_4C_1 \times 3^3 \times (-2)^1 = 4 \times 27 \times (-2) = -216$ 。

係数は **-216**

17

3次公式を2回使う因数分解

$x^6 - 1$ を $(x^2 - 1)(x^4 + Ax^2 + B)$ の形に因数分解したとき、 A, B の値を求めよ。

$A =$ 1 $B =$ 1

$x^6 = (x^2)^3$ と見て、公式 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ を $a = x^2, b = 1$ で使う。

$$(x^2)^3 - 1^3 = (x^2 - 1)\{(x^2)^2 + (x^2)(1) + 1^2\} = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

(さらに $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ と因数分解できるが、この問題では $(x^2 - 1)(x^4 + Ax^2 + B)$ の形まででよい)

$A = 1, B = 1$

$(x + 2)^6$ の展開における x^3 の項の係数を求めよ。

係数 160

一般項は ${}_6C_r x^{6-r} 2^r$ 。 x^3 は $6 - r = 3$ より $r = 3$ 。

係数は ${}_6C_3 \times 2^3 = 20 \times 8 = 160$ 。

係数は 160

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。多項定理・二項係数の和・数値計算への応用など、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

多項定理：3文字の係数

$(a + b + c)^6$ の展開における a^3b^2c の項の係数を求めよ。

係数 60

多項定理より、 $a^p b^q c^r$ ($p + q + r = n$) の項の係数は $\frac{n!}{p! q! r!}$ 。
 $a^3 b^2 c$ は $p = 3, q = 2, r = 1$ 。 $p + q + r = 3 + 2 + 1 = 6 = n$ で条件を満たす。

$$\text{係数は } \frac{6!}{3! 2! 1!} = \frac{720}{6 \times 2 \times 1} = \frac{720}{12} = 60。$$

$a^3 b^2 c$ の項の係数は 60

応2

二項係数の和： $x = 1$ を代入

二項定理 $(1 + x)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 x + {}_n C_2 x^2 + \cdots + {}_n C_n x^n$ において $x = 1$ を代入することで、 ${}_8 C_0 + {}_8 C_1 + {}_8 C_2 + \cdots + {}_8 C_8$ の値を求めよ。

値 256

$(1 + x)^8 = {}_8 C_0 + {}_8 C_1 x + {}_8 C_2 x^2 + \cdots + {}_8 C_8 x^8$ に $x = 1$ を代入すると、右辺はちょうど求めたい和になる。

左辺は $(1 + 1)^8 = 2^8$ 。

$$2^8 = 256。$$

$${}_8 C_0 + {}_8 C_1 + \cdots + {}_8 C_8 = 256$$

応3

二項係数の交代和： $x = -1$ を代入

二項定理に $x = -1$ を代入することで、 ${}_8C_0 - {}_8C_1 + {}_8C_2 - {}_8C_3 + \cdots + {}_8C_8$ の値を求めよ。

値 0

$(1+x)^8 = {}_8C_0 + {}_8C_1x + {}_8C_2x^2 + \cdots + {}_8C_8x^8$ に $x = -1$ を代入すると、
右辺は ${}_8C_0 - {}_8C_1 + {}_8C_2 - {}_8C_3 + \cdots + {}_8C_8$ (r が奇数の項だけマイナス) になる。
左辺は $(1+(-1))^8 = 0^8 = 0$ 。

$${}_8C_0 - {}_8C_1 + {}_8C_2 - \cdots + {}_8C_8 = 0$$

応4

3次公式を使った数値計算

$999^3 + 1$ を、3次式の因数分解の公式を使って（電卓を使わず）計算せよ。

値 997003000

$999^3 + 1^3$ の形なので、公式 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ を $a = 999$, $b = 1$ で使う。

$$a + b = 999 + 1 = 1000$$

$$a^2 - ab + b^2 = 999^2 - 999 \times 1 + 1^2$$

$$999^2 = (1000 - 1)^2 = 1000000 - 2000 + 1 = 998001 \text{ (公式2の応用) なので}$$

$$a^2 - ab + b^2 = 998001 - 999 + 1 = 997003$$

$$\text{したがって } 999^3 + 1 = 1000 \times 997003 = 997003000.$$

$$999^3 + 1 = 997,003,000$$

$\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^6$ の展開における定数項を求めよ。

定数項 240

一般項は $a = x^2$, $b = \frac{2}{x}$, $n = 6$ として

$$T_{r+1} = {}_6C_r (x^2)^{6-r} \left(\frac{2}{x}\right)^r = {}_6C_r 2^r x^{2(6-r)} x^{-r} = {}_6C_r 2^r x^{12-3r}$$

定数項 (x の指数が 0) になるのは $12 - 3r = 0$ より $r = 4$ 。

このときの係数は ${}_6C_4 \times 2^4 = 15 \times 16 = 240$ 。

定数項は 240