

式と証明 まとめ

問題プリント（全27問）

氏名 _____

得点 _____ / 27点

DRILL

まとめテスト（標準）

基本（1～15）

1

3次公式（差の乗法公式）

$(x - 3)^3$ を展開せよ。

x^2 の係数

x の係数

定数項

計算スペース

2

3次式の因数分解（差）

$x^3 - 64$ を $(x - A)(x^2 + Bx + C)$ の形に因数分解したとき、 A, B, C の値を求めよ。

$A =$ $B =$ $C =$

計算スペース

3

二項定理・一般項

$(x + 2)^5$ の展開における x^2 の項の係数を求めよ。

係数

計算スペース

4

整式の割り算

$x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ を $x - 2$ で割ったときの商を $ax^2 + bx + c$ 、余りを R とするとき、 a, b, c, R を求めよ。

$a =$ $b =$ $c =$ $R =$

計算スペース

5

分数式の約分

$\frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$ を約分すると $\frac{ax + b}{cx + d}$ の形になる。 a, b, c, d を求めよ。

$a =$ $b =$ $c =$ $d =$

計算スペース

6

分数式の乗法

$\frac{x+1}{x-3} \times \frac{x-3}{x+4}$ を計算すると $\frac{ax+b}{cx+d}$ の形になる。 a, b, c, d を求めよ。

$a =$ $b =$ $c =$ $d =$

計算スペース

7

分数式の通分・加法

$\frac{1}{x+2} + \frac{3}{x-2}$ を計算すると $\frac{ax+b}{x^2+cx+d}$ の形になる。 a, b, c, d を求めよ。

$a =$ $b =$ $c =$ $d =$

計算スペース

8

恒等式・係数比較法

$x^2 + ax + b = (x - 3)(x + 7)$ が恒等式となるとき、 a, b の値を求めよ。

$a =$ $b =$

計算スペース

9

恒等式・数値代入法

$a(x + 2) + b(x - 1) = 5x + 4$ が恒等式となるとき、 a, b の値を数値代入法で求めよ。

$a =$ $b =$

計算スペース

10

相加相乗平均・基本形

$a > 0$ のとき、 $a + \frac{36}{a}$ の最小値を求めよ。

最小値

そのとき $a =$

計算スペース

11

不等式の証明・平方完成

すべての実数 x について $x^2 + 9 \geq 6x$ であることを証明せよ。

計算スペース

12

二項定理・一般項（両方に係数）

$(3x - 2)^5$ の展開における x^3 の項の係数を求めよ。

係数

計算スペース

13

割り算の等式の逆算

整式 A を $x + 3$ で割ると商が $x^2 - 2x + 4$ 、余りが -5 であるという。 $A = x^3 + ax^2 + bx + c$ とするとき、 a, b, c を求めよ。

$$a = \boxed{} \quad b = \boxed{} \quad c = \boxed{}$$

計算スペース

14

分数式の恒等式

$\frac{9}{x(x+3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+3}$ が成り立つとき、 a, b の値を求めよ。

$$a = \boxed{} \quad b = \boxed{}$$

計算スペース

15

等式の証明・恒等式の利用

$a + b = 1$ のとき、 $a^3 + b^3 = 1 - 3ab$ であることを証明せよ。

計算スペース

発展 (16~25)

16

多項定理

$(a + b + c)^5$ の展開における a^2b^2c の項の係数を求めよ。

係数

計算スペース

17

割り算+恒等式の融合（連立）

整式 $x^3 + ax^2 + bx - 6$ が $x - 1$ で割り切れ、かつ $x + 2$ で割ると余りが -12 であるとき、定数 a, b の値を求めよ。

$$a = \boxed{} \quad b = \boxed{}$$

計算スペース

18

分数式の乗除の複合

$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6} \div \frac{x + 1}{x - 2}$ を計算すると $\frac{ax + b}{x + c}$ の形になる。 a, b, c を求めよ。

$$a = \boxed{} \quad b = \boxed{} \quad c = \boxed{}$$

計算スペース

19

割り算の等式の活用（余りの決定）

整式 $P(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ると余りが $3x-1$ であるという。 $P(x)$ を $x-1$ で割った余りと、 $x-2$ で割った余りをそれぞれ求めよ。

 $x-1$ で割った余り $x-2$ で割った余り

計算スペース

20

相加相乗平均・置き換え型

$x > 1$ のとき、 $x + \frac{49}{x-1}$ の最小値を求めよ。

最小値

そのとき $x =$

計算スペース

21

不等式の証明・2つの平方の和

実数 a, b について $a^2 + 2b^2 \geq 2ab$ であることを証明せよ。

計算スペース

22

相加相乗平均・条件式の利用

$a > 0, b > 0$ で $a + b = 4$ のとき、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ の最小値を求めよ。

最小値

そのとき $a = b =$

計算スペース

対称式の恒等式

$$xy = \boxed{} \qquad x^3 + y^3 = \boxed{}$$

計算スペース

3次式の因数分解・数値計算

值

計算スペース

実数 a, b, c が $a + b + c = 3$ を満たすとき、 $a^2 + b^2 + c^2$ の最小値を求めよ。

最小値

そのとき $a = b = c =$

計算スペース

EXAM

共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 8分／配点 20点

太郎さんは文化祭の展示用に、1辺の長さが x cmの立方体の模型を作った。これをもとに、すべての辺を a cmずつ伸ばした、少し大きい立方体を作ろうとしている。体積がどれだけ増えるかを、太郎さんと先生が話し合っている。

先生「もとの立方体の体積は x^3 cm³だね。すべての辺を a cmずつ伸ばすと、新しい立方体の1辺の長さはどう表せる？」

太郎「はい。 $(x + a)$ cmです。」

先生「じゃあ、3次の乗法公式を使って、新しい体積 V を x と a の式で表してみよう。」

(1) 新しい立方体の体積 V を、3次の乗法公式を用いて x と a の整式で表すと

$$V = x^3 + \boxed{\text{ア}}x^2a + \boxed{\text{イ}}xa^2 + a^3$$

となる。ア、イに入る数を求めよ。

ア イ

(2) 先生「 $x = 10$ 、 $a = 2$ のときで、体積がどれだけ増えたか計算してみよう。」

(1)の結果を利用すると、 $x = 10$ cm、 $a = 2$ cmのときの体積の増加量 ($V - x^3$) は cm³ である。

ウエオ

(3)

花子「反対に、すべての辺を短くしたらどうなるだろう？」花子さんは同じ立方体から、すべての辺を $b\text{cm}$ ずつ短くした模型を作ることにした（新しい体積は $(x - b)^3$ ）。(1)の結果を利用すると、 $x = 10\text{cm}$ 、 $b = 1\text{cm}$ のとき、体積の減少量 $(x^3 - (x - b)^3)$ は カキク cm^3 である。

カキク

大問2 目標時間 8分／配点 20点

花子さんは、文化祭の受付で使う横 $a\text{m}$ ・縦 $b\text{m}$ の長方形の看板を、面積が 16m^2 になるように作ろうとしている。看板のまわりを縁取りするテープの長さ（周の長さ）をできるだけ短くしたい。花子さんと先生が、相加平均・相乗平均の関係を使ってテープの長さを最小にする方法を話し合っている。

先生「 $a > 0$ 、 $b > 0$ で $ab = 16$ という条件があるね。まず $a + b$ の最小値を考えてみよう。」

(1)

$a > 0$ 、 $b > 0$ で $ab = 16$ のとき、相加平均・相乗平均の関係を利用すると、 $a + b$ の最小値は ア、そのときの a 、 b の値はどちらも イ である。

ア

イ

(2)

(1)の結果を利用すると、周の長さ $L = 2(a + b)$ の最小値は $L =$ ウエ である。

ウエ

(3)

先生「実は看板を置く台の大きさの都合で、縦の長さ b は2m以上6m以下に制限されているんだ。」 この制限のもとでの L の最小値を求めると $L =$ オカ である。

オカ

記述チャレンジ

記1 この章で学んだ「3次式の因数分解の公式」「整式の割り算の等式 $A = BQ + R$ 」「恒等式の係数比較法・数値代入法」「等式・不等式の証明」は、一見バラバラな内容に見える。しかし、これらはすべて『2つの式が本当に等しい（ぴったり一致している）かどうかを確かめる』という1つの考え方につながっている。このことを、それぞれの内容に軽く触れながら説明せよ。

記2 $a > 0, b > 0$ で $a + b = 6$ のとき、恒等式 $(a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3$ を用いて $a^3 + b^3$ を ab の式で表し、さらに相加平均・相乗平均の関係を用いて $a^3 + b^3$ の最小値を求めよ。
