

対数関数・常用対数

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～7）

1

対数方程式（基本）

$\log_2(x + 3) = 3$ を解け。

$x = \underline{5}$

真数条件： $x + 3 > 0$ より $x > -3$ 。

$x + 3 = 2^3 = 8 \rightarrow x = 5$ ($x > -3$ を満たす)

$x = 5$

2

対数方程式・同底の比較

$\log_3(2x - 1) = \log_3 5$ を解け。

$$x = \underline{3}$$

真数条件： $2x - 1 > 0$ より $x > \frac{1}{2}$ 。

底が同じなので真数も等しい： $2x - 1 = 5 \rightarrow x = 3$ ($x > \frac{1}{2}$ を満たす)

$$x = 3$$

3

対数方程式（底5）

$\log_5(3x - 2) = 2$ を解け。

$$x = \underline{9}$$

真数条件： $3x - 2 > 0$ より $x > \frac{2}{3}$ 。

$3x - 2 = 5^2 = 25 \rightarrow 3x = 27 \rightarrow x = 9$ ($x > \frac{2}{3}$ を満たす)

$$x = 9$$

4

対数不等式・真数条件に注意

$\log_2(x - 2) < 3$ を解け。

$$\text{解の範囲： } \underline{2} < x < \underline{10}$$

真数条件： $x - 2 > 0$ より $x > 2$ 。

$3 = \log_2 8$ より $\log_2(x - 2) < \log_2 8$ 。底2は増加関数なので向きはそのまま： $x - 2 < 8 \rightarrow x < 10$

真数条件とあわせて

$$2 < x < 10$$

5

桁数 (10乗)

2^{10} の桁数を求めよ。

4 桁

$$\log_{10} 2^{10} = 10 \times 0.3010 = 3.010$$

$$3 \leq 3.010 < 4 \text{ なので } 10^3 \leq 2^{10} < 10^4。$$

$$\mathbf{4\text{桁} } (2^{10} = 1024)$$

6

桁数

3^5 の桁数を求めよ。

3 桁

$$\log_{10} 3^5 = 5 \times 0.4771 = 2.3855$$

$$2 \leq 2.3855 < 3 \text{ なので } 10^2 \leq 3^5 < 10^3。$$

$$\mathbf{3\text{桁} } (3^5 = 243)$$

7

桁数 (底5)

5^8 の桁数を求めよ。

6 桁

$$\log_{10} 5^8 = 8 \times 0.6990 = 5.592$$

$$5 \leq 5.592 < 6 \text{ なので } 10^5 \leq 5^8 < 10^6。$$

$$\mathbf{6\text{桁} } (5^8 = 390625)$$

標準 (8~14)

8

対数方程式・真数条件で解を絞る

$\log_2 x + \log_2(x - 2) = 3$ を解け。

$$x = \underline{4}$$

真数条件： $x > 0$ かつ $x - 2 > 0$ より $x > 2$ 。

$$\log_2\{x(x - 2)\} = 3 \rightarrow x(x - 2) = 8 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \rightarrow x = 4, -2$$

$x = -2$ は $x > 2$ を満たさないので除外。

$$x = 4$$

9

置き換え型 ($t = \log_3 x$)

$(\log_3 x)^2 - \log_3 x^2 - 3 = 0$ を解け。(x の値をコンマ区切りで入力)

$$x = \underline{27, 1/3}$$

真数条件： $x > 0$ 。 $\log_3 x^2 = 2\log_3 x$ より、 $t = \log_3 x$ とおくと

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \rightarrow (t - 3)(t + 1) = 0 \rightarrow t = 3, -1$$

$t = 3$ のとき $x = 3^3 = 27$ 、 $t = -1$ のとき $x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ 。どちらも $x > 0$ を満たす。

$$x = 27, \frac{1}{3}$$

10

対数不等式・底が $0 < a < 1$

$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > -2$ を解け。

解の範囲： -1 $< x <$ 3

真数条件： $x+1 > 0$ より $x > -1$ 。

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$ より $-2 = \log_{\frac{1}{2}} 4$ 。底 $\frac{1}{2}$ は減少関数なので向きが逆転： $x+1 < 4$

$\rightarrow x < 3$

真数条件とあわせて

$-1 < x < 3$

11

桁数（大きい数）

6^{15} の桁数を求めよ。

12 桁

$\log_{10} 6^{15} = 15 \times 0.7781 = 11.6715$

$11 \leq 11.6715 < 12$ なので $10^{11} \leq 6^{15} < 10^{12}$ 。

12桁

12

桁数

7^{20} の桁数を求めよ。

17 桁

$\log_{10} 7^{20} = 20 \times 0.8451 = 16.902$

$16 \leq 16.902 < 17$ なので $10^{16} \leq 7^{20} < 10^{17}$ 。

17桁

13

最高位の数字

2^{13} の最高位の数字を求めよ。

最高位の数字 8

$$\log_{10} 2^{13} = 13 \times 0.3010 = 3.913$$

整数部分3、小数部分 0.913。表より $\log_{10} 8 = 0.9031 \leq 0.913 < \log_{10} 9 = 0.9542$ 。

最高位の数字は8 ($2^{13} = 8192$)

14

最高位の数字

3^7 の最高位の数字を求めよ。

最高位の数字 2

$$\log_{10} 3^7 = 7 \times 0.4771 = 3.3397$$

整数部分3、小数部分 0.3397。表より $\log_{10} 2 = 0.3010 \leq 0.3397 < \log_{10} 3 = 0.4771$ 。

最高位の数字は2 ($3^7 = 2187$)

挑戦 (15~18)

15

対数方程式・領域外の解を除く

$\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$ を解け。

$x =$ 3

真数条件： $x-1 > 0$ かつ $x+1 > 0$ より $x > 1$ 。

$$\log_2\{(x-1)(x+1)\} = 3 \rightarrow x^2 - 1 = 8 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$$

$x = -3$ は $x > 1$ を満たさないので除外。

$$x = 3$$

16

対数不等式・両側から絞る

$\log_{\frac{1}{3}}(x-2) \geq -1$ を解け。

解の範囲： 2 $< x \leq$ 5

真数条件： $x-2 > 0$ より $x > 2$ 。

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$ より $-1 = \log_{\frac{1}{3}} 3$ 。底 $\frac{1}{3}$ は減少関数なので向きが逆転： $x-2 \leq 3$
 $\rightarrow x \leq 5$

真数条件とあわせて

$$2 < x \leq 5$$

17

桁数・底の分解が必要

12^{10} の桁数を求めよ。 $(12 = 4 \times 3$ と考え、 $\log_{10} 4 = 0.6021$ を使う)

11 桁

$$\log_{10} 12 = \log_{10}(4 \times 3) = \log_{10} 4 + \log_{10} 3 = 0.6021 + 0.4771 = 1.0792$$

$$\log_{10} 12^{10} = 10 \times 1.0792 = 10.792$$

$$10 \leq 10.792 < 11 \text{ なので } 10^{10} \leq 12^{10} < 10^{11}。$$

11桁

18

桁数と最高位の数字を同時に

2^{50} の桁数と最高位の数字を求めよ。

桁数 16 最高位の数字 1

$$\log_{10} 2^{50} = 50 \times 0.3010 = 15.05$$

整数部分15、小数部分 0.05。桁数 $= 15 + 1 = 16$ 桁。

表より $\log_{10} 1 = 0 \leq 0.05 < \log_{10} 2 = 0.3010$ なので最高位の数字は1。

16桁、最高位の数字は1 ($2^{50} = 1125899906842624$)

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。常用対数を道具として使いこなす、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

桁数の条件から n を求める

3^n が10桁の数となるような自然数 n をすべて求めよ。(複数ある場合はコンマ区切りで入力)

$n =$ 19,20

10桁になる条件は $9 \leq \log_{10} 3^n < 10$ 、つまり $9 \leq 0.4771n < 10$ 。

各辺を 0.4771 で割ると $\frac{9}{0.4771} \leq n < \frac{10}{0.4771}$ 、すなわち $18.86\cdots \leq n < 20.96\cdots$ 。

これを満たす自然数は $n = 19, 20$ 。

(確認： $n = 19$ のとき $19 \times 0.4771 = 9.0649 \rightarrow 10$ 桁。 $n = 20$ のとき $20 \times 0.4771 = 9.542 \rightarrow 10$ 桁。 $n = 21$ のとき $21 \times 0.4771 = 10.0191 \rightarrow 11$ 桁になり条件を外れる。)

$n = 19, 20$

応2

小数首位の条件からnを求める

0.3^n の値が初めて 10^{-5} より小さくなるような自然数 n を求めよ。

$n = \underline{10}$

$$0.3^n < 10^{-5} \Leftrightarrow \log_{10} 0.3^n < -5 \Leftrightarrow n \log_{10} 0.3 < -5$$

$\log_{10} 0.3 = \log_{10} 3 - 1 = 0.4771 - 1 = -0.5229$ (負の数なので、両辺を割ると不等号の向きが逆転する)

$$n > \frac{-5}{-0.5229} = \frac{5}{0.5229} = 9.562 \dots$$

これを満たす最小の自然数は $n = 10$ 。

(確認: $n = 9$ のとき $9 \times (-0.5229) = -4.7061 \rightarrow 0.3^9 \approx 10^{-4.71} \approx 1.97 \times 10^{-5}$ (まだ 10^{-5} より大きい)。

$n = 10$ のとき $10 \times (-0.5229) = -5.229 \rightarrow 0.3^{10} \approx 10^{-5.229} \approx 5.9 \times 10^{-6}$ (初めて 10^{-5} より小さくなる)。

$n = 10$

応3

対数方程式の解の個数

方程式 $\log_3 x + \log_3(x - 2) = 1$ の実数解の個数と、その解を求めよ。

解の個数 1 個 解 $x = \underline{3}$

真数条件: $x > 0$ かつ $x - 2 > 0$ より $x > 2$ 。

$$\log_3 \{x(x - 2)\} = 1 \rightarrow x(x - 2) = 3 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \rightarrow x = 3, -1$$

2次方程式としては解が2つ見えるが、 $x = -1$ は真数条件 $x > 2$ を満たさないため方程式の解ではない。

真数条件を確認しないと解の個数を1個多く数えてしまうミスが起きやすい。

実数解は1個 ($x = 3$)

応4

常用対数で大小比較

5^{100} と 3^{150} はどちらが大きいのか、常用対数を利用して比較せよ。(大きいほうを
ア： 5^{100} イ： 3^{150} で答えよ)

大きいほう イ

$$\log_{10} 5^{100} = 100 \times 0.6990 = 69.90$$

$$\log_{10} 3^{150} = 150 \times 0.4771 = 71.565$$

$\log_{10}$ は増加関数なので、 $\log_{10}$ の値が大きいほうが元の数も大きい。 $71.565 > 69.90$ より

3^{150} のほうが大きい (イ)

応5

指数法則+常用対数の複合

$\frac{6^{40}}{2^{30}}$ の桁数を求めよ。

23 桁

まず指数法則で式を整理する。 $6^{40} = (2 \times 3)^{40} = 2^{40} \times 3^{40}$ なので

$$\frac{6^{40}}{2^{30}} = \frac{2^{40} \times 3^{40}}{2^{30}} = 2^{10} \times 3^{40}$$

$$\log_{10}(2^{10} \times 3^{40}) = 10 \log_{10} 2 + 40 \log_{10} 3 = 10 \times 0.3010 + 40 \times 0.4771 = 3.010 + 19.084 = 22.094$$

$$22 \leq 22.094 < 23 \text{ なので } 10^{22} \leq \frac{6^{40}}{2^{30}} < 10^{23}。$$

23桁