

対数とその性質

解答（全25問）

氏名 _____

得点 _____ / 25点

DRILL

練習問題（全20問）

基本（1～8）

1

定義そのまま

$\log_2 16$ の値を求めよ。

値 4

$$2^4 = 16 \text{ なので}$$

$$\log_2 16 = 4$$

2

負の指数

$\log_5 \frac{1}{25}$ の値を求めよ。

値 -2

$$5^{-2} = \frac{1}{25} \text{ なので}$$

$$\log_5 \frac{1}{25} = -2$$

3

基本値 $\log_a 1=0$ $\log_{10} 1$ の値を求めよ。値 0

$$10^0 = 1 \text{ なので}$$

$$\log_{10} 1 = 0$$

4

基本値 $\log_a a=1$ $\log_7 7$ の値を求めよ。値 1

$$7^1 = 7 \text{ なので}$$

$$\log_7 7 = 1$$

5

負の指数

 $\log_3 \frac{1}{3}$ の値を求めよ。値 -1

$$3^{-1} = \frac{1}{3} \text{ なので}$$

$$\log_3 \frac{1}{3} = -1$$

6

分数の指数（累乗根）

 $\log_9 3$ の値を求めよ。値 $1/2$

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3 \text{ なので}$$

$$\log_9 3 = \frac{1}{2}$$

7

負の指数

 $\log_2 \frac{1}{8}$ の値を求めよ。値 -3

$$2^{-3} = \frac{1}{8} \text{ なので}$$

$$\log_2 \frac{1}{8} = -3$$

8

底10（常用対数の準備）

 $\log_{10} 10000$ の値を求めよ。値 4

$$10^4 = 10000 \text{ なので}$$

$$\log_{10} 10000 = 4$$

- 9 $\log_2 6 + \log_2 \frac{4}{3}$ の値を求めよ。

値 3

積の性質でまとめる。

$$\begin{aligned}\log_2 6 + \log_2 \frac{4}{3} &= \log_2 \left(6 \times \frac{4}{3} \right) = \log_2 8 \\ &= 3\end{aligned}$$

- 10 $\log_3 45 - \log_3 5$ の値を求めよ。

値 2

商の性質でまとめる。

$$\begin{aligned}\log_3 45 - \log_3 5 &= \log_3 \frac{45}{5} = \log_3 9 \\ &= 2\end{aligned}$$

- 11 $\log_2 5 + \log_2 4 - \log_2 10$ の値を求めよ。

値 1

積・商の性質でまとめる。

$$\begin{aligned}\log_2 5 + \log_2 4 - \log_2 10 &= \log_2 \frac{5 \times 4}{10} = \log_2 2 \\ &= 1\end{aligned}$$

12

累乗の性質を使う

$2\log_{10} 5 + \log_{10} 4$ の値を求めよ。

値 2

累乗の性質で係数を指数に戻す。

$$2\log_{10} 5 = \log_{10} 5^2 = \log_{10} 25$$

これと足して

$$\log_{10} 25 + \log_{10} 4 = \log_{10}(25 \times 4) = \log_{10} 100$$

$$= 2$$

13 $\log_2 \frac{1}{2} + \log_2 16$ の値を求めよ。

値 3

積の性質でまとめる。

$$\log_2 \frac{1}{2} + \log_2 16 = \log_2 \left(16 \times \frac{1}{2} \right) = \log_2 8$$

$$= 3$$

14 $\log_5 250 - \log_5 2$ の値を求めよ。

値 3

商の性質でまとめる。

$$\log_5 250 - \log_5 2 = \log_5 \frac{250}{2} = \log_5 125$$

$5^3 = 125$ なので

$$= 3$$

15 $\log_6 4 + \log_6 9$ の値を求めよ。

値 2

積の性質でまとめる。

$$\log_6 4 + \log_6 9 = \log_6 (4 \times 9) = \log_6 36$$

$$6^2 = 36 \text{ なので}$$

$$= 2$$

16

底の変換公式を使う

$\log_4 8$ の値を求めよ。

値 $\frac{3}{2}$

底の変換公式で底を2にそろえる。

$$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

挑戦 (17~20)

17

積・商をまとめて一気に計算

$\log_2 3 - \log_2 24 + \log_2 32$ の値を求めよ。

値 2

積・商の性質でまとめて1つの対数にする。

$$\log_2 3 - \log_2 24 + \log_2 32 = \log_2 \frac{3 \times 32}{24} = \log_2 \frac{96}{24} = \log_2 4$$

$$= 2$$

18

底の変換公式で底をそろえて掛ける

 $\log_2 3 \times \log_3 4$ の値を求めよ。値 2

$$\begin{aligned}\log_3 4 \text{ を底2にそろえる : } \log_3 4 &= \frac{\log_2 4}{\log_2 3}。 \\ \log_2 3 \times \log_3 4 &= \log_2 3 \times \frac{\log_2 4}{\log_2 3} = \log_2 4 \\ &= 2\end{aligned}$$

19

底の変換公式で底をそろえて掛ける

 $\log_2 5 \times \log_5 8$ の値を求めよ。値 3

$$\begin{aligned}\log_5 8 \text{ を底2にそろえる : } \log_5 8 &= \frac{\log_2 8}{\log_2 5}。 \\ \log_2 5 \times \log_5 8 &= \log_2 5 \times \frac{\log_2 8}{\log_2 5} = \log_2 8 \\ &= 3\end{aligned}$$

$\log_4 9 \times \log_3 8$ の値を求めよ。

値 3

まず $\log_4 9$ を底2にそろえ、累乗の性質も使って整理する。

$$\log_4 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 4} = \frac{\log_2 3^2}{2} = \frac{2 \log_2 3}{2} = \log_2 3$$

次に $\log_3 8$ も累乗の性質で整理する（底の変換で底2にしてもよい）。

$$\log_3 8 = 3 \log_3 2 = \frac{3}{\log_2 3}$$

これらを掛け合わせると

$$\log_4 9 \times \log_3 8 = \log_2 3 \times \frac{3}{\log_2 3}$$

$$= 3$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。文字でおいた対数の式変形と、条件式から値を求める問題に挑戦しよう。

応1

式変形（ $\log_2 3=a$ とおく）

$\log_2 3 = a$ とおくとき、 $\log_2 24$ を a を用いて表せ。

$24 = 8 \times 3$ なので、積の性質で分ける。

$$\log_2 24 = \log_2 (8 \times 3) = \log_2 8 + \log_2 3 = 3 + a$$

$$\log_2 24 = 3 + a$$

応2

式変形（底の変換+累乗+商）

$\log_2 3 = a$ とおくとき、 $\log_4 \frac{9}{2}$ を a を用いて表せ。

まず底の変換公式で底を2にそろえる。

$$\log_4 \frac{9}{2} = \frac{\log_2 \frac{9}{2}}{\log_2 4} = \frac{\log_2 \frac{9}{2}}{2}$$

分子を商・累乗の性質でばらす。

$$\log_2 \frac{9}{2} = \log_2 9 - \log_2 2 = \log_2 3^2 - 1 = 2a - 1$$

これを戻すと

$$\log_4 \frac{9}{2} = \frac{2a - 1}{2} = a - \frac{1}{2}$$

$$\log_4 \frac{9}{2} = a - \frac{1}{2}$$

応3

条件式からの値（1文字を求めて代入）

$\log_2 x = 3$ のとき、 $\log_4 x^2$ の値を求めよ。

値 3

$\log_2 x = 3$ より $x = 2^3 = 8$ 。

$$\log_4 x^2 = \log_4 8^2 = \log_4 64$$

底の変換公式で底を2にそろえる。

$$\log_4 64 = \frac{\log_2 64}{\log_2 4} = \frac{6}{2}$$

$$\log_4 x^2 = 3$$

応4

条件式からの値（対数方程式・真数条件つき）

$\log_3(x+2) + \log_3(x-2) = 2$ ($x > 2$) を満たす x の値を求めよ。

$x =$ $\sqrt{13}$

真数条件： $x+2 > 0$ かつ $x-2 > 0$ 、あわせて $x > 2$ （問題文の条件と一致）。

積の性質でまとめる。

$$\log_3(x+2) + \log_3(x-2) = \log_3\{(x+2)(x-2)\} = \log_3(x^2 - 4)$$

これが2に等しいので

$$x^2 - 4 = 3^2 = 9 \Rightarrow x^2 = 13$$

$x > 2$ より $x = -\sqrt{13}$ は不適。

$$x = \sqrt{13}$$

$\log_2 x + \log_2 y = 5$ 、 $x + y = 12$ ($x > y > 0$) を満たす x, y の値を求めよ。

$$x = \underline{8} \quad y = \underline{4}$$

積の性質より $\log_2 x + \log_2 y = \log_2 xy = 5$ なので $xy = 2^5 = 32$ 。

条件は $x + y = 12$, $xy = 32$ 。

x, y は2次方程式 $t^2 - 12t + 32 = 0$ の解（和と積が分かっているときの定番の手）。

$(t - 4)(t - 8) = 0$ より $t = 4, 8$ 。

$x > y$ なので $x = 8, y = 4$ 。真数条件 $x > 0, y > 0$ も満たす。

$$x = 8, y = 4$$