

指数関数とグラフ

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～7）

1

指数方程式

$2^x = 16$ を解け。

$x = 4$

$16 = 2^4$ なので $2^x = 2^4$ 。

$x = 4$

2

指数方程式・負の指数

$3^x = \frac{1}{9}$ を解け。

$x = -2$

$\frac{1}{9} = 3^{-2}$ なので $3^x = 3^{-2}$ 。

$x = -2$

3

指数方程式・ $y=1$ の形 $5^x = 1$ を解け。

$$x = \underline{0}$$

 $1 = 5^0$ なので $5^x = 5^0$ 。(どんな正の数の0乗も1)

$$x = 0$$

4

大小比較・底が同じ ($a>1$)次のうち大きいのはどちらか。記号で答えよ。 ア： 2^3 イ： 2^5 大きいほう イ底2は $2 > 1$ なので単調増加。指数を比べると $3 < 5$ 。

$$\text{イ } (2^5 = 32 > 2^3 = 8)$$

5

大小比較・底が同じ ($0<a<1$)次のうち大きいのはどちらか。記号で答えよ。 ア： $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ イ： $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ 大きいほう イ底 $\frac{1}{2}$ は $0 < \frac{1}{2} < 1$ なので単調減少。指数が小さいほうが値は大きい。 $-1 < 2$ 。

$$\text{イ } \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 > \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right)$$

6

指数方程式・底をそろえる

 $4^x = 8$ を解け。

$$x = \underline{3/2}$$

底をそろえる： $4 = 2^2$ 、 $8 = 2^3$ 。

$$(2^2)^x = 2^3 \Rightarrow 2^{2x} = 2^3 \Rightarrow 2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

7

指数不等式・底が1より大

 $2^x > 16$ の解は $x > \square$ の形になる。 $\square$ に入る数を答えよ。

$$\square = \underline{4}$$

 $16 = 2^4$ なので $2^x > 2^4$ 。底2は $2 > 1$ なので向きはそのまま。

$$x > 4$$

標準 (8~14) ※パターンは自分で判定

8

 $9^x = 27$ を解け。

$$x = \underline{3/2}$$

底をそろえる： $9 = 3^2$ 、 $27 = 3^3$ 。

$$3^{2x} = 3^3 \Rightarrow 2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

9 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$ を解け。

$x =$ -2

底をそろえる： $\frac{1}{3} = 3^{-1}$ 、 $9 = 3^2$ 。

$$(3^{-1})^x = 3^2 \Rightarrow 3^{-x} = 3^2 \Rightarrow -x = 2$$

$$x = -2$$

10 次の3つのうち最大のものはどれか。記号で答えよ。 ア： 3^{-2} イ： 3^0 ウ： 3^1

最大 ウ

底3は $3 > 1$ なので単調増加。指数を比べると $-2 < 0 < 1$ 。

$$3^{-2} = \frac{1}{9}, 3^0 = 1, 3^1 = 3。$$

ウ ($3^1 = 3$ が最大)

11 次のうち大きいのはどちらか。記号で答えよ。底をそろえて比較すること。 ア： 8^2 イ： 4^4

大きいほう イ

底2にそろえる： $8^2 = (2^3)^2 = 2^6$ 、 $4^4 = (2^2)^4 = 2^8$ 。

$2 > 1$ なので単調増加、 $6 < 8$ 。

イ ($8^2 = 64 < 4^4 = 256$)

12 $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{1}{8}$ の解は $x > \square$ の形になる。 $\square$ に入る数を答えよ。

$\square = \underline{3}$

$$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \text{ なので } \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^3。$$

底 $\frac{1}{2}$ は $0 < \frac{1}{2} < 1$ なので減少関数 → 向きが逆転。

$$x > 3$$

13 $3^x \leq 81$ の解は $x \leq \square$ の形になる。 $\square$ に入る数を答えよ。

$\square = \underline{4}$

$$81 = 3^4 \text{ なので } 3^x \leq 3^4。 \text{底}3 \text{は } 3 > 1 \text{ なので向きはそのまま。}$$

$$x \leq 4$$

14 おきかえ $t=2^x$

$$4^x - 2 \cdot 2^x - 8 = 0 \text{ を解け。}$$

$x = \underline{2}$

$$t = 2^x \ (t > 0) \text{ とおくと } t^2 - 2t - 8 = 0, \ (t - 4)(t + 2) = 0, \ t = 4, -2。$$

$t > 0$ より $t = -2$ は不適。 $t = 4$ のみ。

$$2^x = 4 = 2^2$$

$$x = 2$$

挑戦 (15~18)

15

底が3つとも異なる・全部そろえる

次の3つのうち最大のものはどれか。記号で答えよ。 ア： 2^7 イ： 4^4 ウ： 8^2

最大 イ

すべて底2の累乗になおす：

$$2^7 = 2^7, 4^4 = (2^2)^4 = 2^8, 8^2 = (2^3)^2 = 2^6$$

底2は $2 > 1$ なので単調増加。指数を比べると $6 < 7 < 8$ 。

$$\text{イ } (2^6 = 64 < 2^7 = 128 < 2^8 = 256)$$

16

おきかえ・2つの解

$25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$ を解け。解が2つあるときはコンマ区切りで入力せよ。

$x =$ 0,1

$25^x = (5^x)^2$ なので $t = 5^x$ ($t > 0$) とおく。

$t^2 - 6t + 5 = 0$ 、 $(t - 1)(t - 5) = 0$ 、 $t = 1, 5$ 。どちらも $t > 0$ を満たすので両方採用。

$$5^x = 1 = 5^0 \Rightarrow x = 0$$

$$5^x = 5 = 5^1 \Rightarrow x = 1$$

$$x = 0, 1$$

17

おきかえ・不等式の範囲（両端点）

$9^x - 4 \cdot 3^x + 3 < 0$ を解け。解は $\square_1 < x < \square_2$ の形になる。

$$\square_1 = \underline{0} \quad \square_2 = \underline{1}$$

$9^x = (3^x)^2$ なので $t = 3^x$ ($t > 0$) とおく。

$t^2 - 4t + 3 < 0$ 、 $(t - 1)(t - 3) < 0$ 、 $1 < t < 3$ （このままで $t > 0$ も満たしている）。

$1 = 3^0$ 、 $3 = 3^1$ なので $3^0 < 3^x < 3^1$ 。底3は $3 > 1$ なので向きはそのまま。

$$0 < x < 1$$

18

底が0と1の間・分数指数

$\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq 32$ の解は $x \leq \square$ の形になる。 $\square$ に入る数を答えよ。

$$\square = \underline{-5/2}$$

底をそろえる： $\frac{1}{4} = 2^{-2}$ 、 $32 = 2^5$ 。

$$(2^{-2})^x \geq 2^5 \Rightarrow 2^{-2x} \geq 2^5$$

底2は $2 > 1$ なので向きはそのまま： $-2x \geq 5 \Rightarrow x \leq -\frac{5}{2}$

$$x \leq -\frac{5}{2}$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。 $t = 2^x$ のおきかえを使った2次関数の最大・最小に挑戦しよう。

応1

おきかえの2次関数・最小値

$y = 4^x - 2^{x+1} + 3$ の最小値を求めよ。

最小値 2 そのとき $x =$ 0

$2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$ 、 $4^x = (2^x)^2$ なので $t = 2^x$ ($t > 0$) とおくと

$$y = t^2 - 2t + 3 = (t - 1)^2 + 2$$

t は $t > 0$ の範囲を自由に動けて、頂点の $t = 1$ はその範囲の中にある。下に凸なので頂点で最小値をとる。

$t = 1$ のとき $2^x = 1$ より $x = 0$ 。

$x = 0$ のとき最小値 2（最大値はない）

応2

おきかえ・置き換え変数の範囲に制限がつくタイプ

$y = 4^x + 4^{-x} - 2(2^x + 2^{-x}) + 1$ の最小値を求めよ。

最小値 -1 そのとき $x =$ 0

$t = 2^x + 2^{-x}$ とおく。 $2^x > 0$ 、 $2^{-x} > 0$ だから

$$\left(\sqrt{2^x} - \sqrt{2^{-x}}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

等号は $2^x = 2^{-x}$ 、すなわち $x = 0$ のとき成り立つ。よって $t \geq 2$ 。

また $t^2 = (2^x + 2^{-x})^2 = 4^x + 2 + 4^{-x}$ より $4^x + 4^{-x} = t^2 - 2$ 。

$$y = (t^2 - 2) - 2t + 1 = t^2 - 2t - 1 = (t - 1)^2 - 2$$

この関数は頂点 $t = 1$ より右側 ($t \geq 2$) でずっと増加するので、範囲の左端 $t = 2$ で最小になる。

$t = 2$ のとき $y = (2 - 1)^2 - 2 = -1$ 。このとき $x = 0$ 。

$x = 0$ のとき最小値 -1 (最大値はない)

応3

文章題：指数不等式の応用

ある培養液の中の菌の数は、はじめ100匹で、1時間ごとに2倍に増えていく。 x 時間後の菌の数を y 匹とすると $y = 100 \cdot 2^x$ と表せる。菌の数が3200匹を初めて超えるのは何時間後か。整数で答えよ。

$x =$ 6 時間後

$$100 \cdot 2^x > 3200$$

$$2^x > 32 = 2^5$$

底2は $2 > 1$ なので向きはそのまま： $x > 5$

$x > 5$ を満たす最小の整数は $x = 6$ 。

6時間後に初めて3200匹を超える

応4

2変数の条件つき最大

実数 x, y が $2^x + 2^y = 8$ を満たすとき、 $x + y$ の最大値を求めよ。

最大値 4 そのとき $x = \underline{2}$ $y = \underline{2}$

$u = 2^x, v = 2^y$ ($u, v > 0$) とおくと $u + v = 8$ 。

$(u - v)^2 \geq 0$ より $u^2 + v^2 \geq 2uv$ 、両辺に $2uv$ を足すと

$$(u + v)^2 \geq 4uv \Rightarrow 64 \geq 4uv \Rightarrow uv \leq 16$$

等号は $u = v$ 、つまり $u = v = 4$ のときに成り立つ。

$$2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = uv \leq 16 = 2^4$$

底2は $2 > 1$ なので向きはそのまま： $x + y \leq 4$

等号成立は $u = v = 4$ のとき、すなわち $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$ 、 $2^y = 4 \Rightarrow y = 2$ 。

$x = 2, y = 2$ のとき最大値 4

応5

おきかえ+xの範囲指定・最大最小

$-1 \leq x \leq 3$ のとき、 $y = 4^x - 4 \cdot 2^x + 7$ の最大値・最小値を求めよ。

最大値 39 ($x = \underline{3}$) 最小値 3 ($x = \underline{1}$)

$t = 2^x$ ($t > 0$) とおくと $y = t^2 - 4t + 7 = (t - 2)^2 + 3$ 。

x の範囲 $-1 \leq x \leq 3$ に対応する t の範囲を求める：底2は増加関数なので

$$2^{-1} \leq 2^x \leq 2^3 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq t \leq 8$$

頂点 $t = 2$ はこの範囲 $\left[\frac{1}{2}, 8\right]$ の中にあるので、下に凸の頂点で最小値をとる。

$$t = 2 \text{ のとき } 2^x = 2 \Rightarrow x = 1, y = (2 - 2)^2 + 3 = 3。$$

最大値は軸 $t = 2$ から遠いほうの端点でとる。 $t = 2$ から $t = \frac{1}{2}$ までの距離は 1.5、

$t = 8$ までの距離は 6。遠いのは $t = 8$ 。

$$t = 8 \text{ のとき } 2^x = 8 \Rightarrow x = 3, y = (8 - 2)^2 + 3 = 39。$$

$x = 3$ のとき最大値 39、 $x = 1$ のとき最小値 3

