

指数の拡張

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～7）

1

0乗

7^0 の値を求めよ。

答え 1

0以外のどんな数でも、0乗は1になる。

$$7^0 = 1$$

2

負の整数乗

2^{-3} の値を求めよ。

答え $\frac{1}{8}$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$2^{-3} = \frac{1}{8}$$

3

分数の負の整数乗

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ の値を求めよ。

答え 8

負の指数は逆数にしてから正の指数で計算する。

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$$

4

累乗根（奇数）

$\sqrt[3]{27}$ の値を求めよ。

答え 3

3乗して27になる数を探す。 $3^3 = 27$ より

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

5

累乗根（偶数）

$\sqrt[4]{16}$ の値を求めよ。

答え 2

4乗して16になる正の数を探す。 $2^4 = 16$ より

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

6

有理数指数 (1/n形)

 $8^{\frac{1}{3}}$ の値を求めよ。答え 2 $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}$ 。3乗して8になる数は2。

$$8^{\frac{1}{3}} = 2$$

7

有理数指数 (1/2形)

 $16^{\frac{1}{2}}$ の値を求めよ。答え 4

$$16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$$

$$16^{\frac{1}{2}} = 4$$

標準 (8~14)

8

m/n形 (m≠1)

 $9^{\frac{3}{2}}$ の値を求めよ。答え 27

$$9^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27$$

$$9^{\frac{3}{2}} = 27$$

9

負の有理数指数

$8^{-\frac{2}{3}}$ の値を求めよ。

答え 1/4

まず正の指数で計算： $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

負の指数なので逆数にする： $8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$

$$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$$

10 $32^{\frac{3}{5}}$ の値を求めよ。

答え 8

$32 = 2^5$ なので $\sqrt[5]{32} = 2$ 。

$$32^{\frac{3}{5}} = (\sqrt[5]{32})^3 = 2^3 = 8$$

$$32^{\frac{3}{5}} = 8$$

11 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$ の値を求めよ。

答え 2

負の指数なので逆数にしてから計算する。

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2$$

12

法則1 (掛け算→指数の足し算)

 $2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}}$ の値を求めよ。答え 2

底が同じなので指数を足す。

$$2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 2^1 = 2$$

$$2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2$$

13

法則3 (累乗の累乗)

 $\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3$ の値を求めよ。答え 9

累乗の累乗は指数を掛ける。

$$\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 3^{\frac{2}{3} \times 3} = 3^2 = 9$$

$$\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 9$$

14

負の数の奇数乗根

 $\sqrt[5]{-32}$ の値を求めよ。答え -2

5乗根は奇数乗根なので、負の数にもただ1つの実数の根がある。

$$(-2)^5 = -32 \text{ より}$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2$$

挑戦 (15~18)

15

法則2 (割り算→指数の引き算) と負の指数

$2^{\frac{5}{6}} \div 2^{-\frac{1}{6}}$ の値を求めよ。

答え 2

割り算は指数の引き算。マイナスを引くのでプラスになる点に注意。

$$2^{\frac{5}{6}} \div 2^{-\frac{1}{6}} = 2^{\frac{5}{6} - (-\frac{1}{6})} = 2^{\frac{5}{6} + \frac{1}{6}} = 2^1 = 2$$

$$2^{\frac{5}{6}} \div 2^{-\frac{1}{6}} = 2$$

16

複数の累乗根が混ざる式

$27^{\frac{2}{3}} \div 9^{\frac{1}{2}}$ の値を求めよ。

答え 3

それぞれ先に計算する。

$$27^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$$

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{よって } 27^{\frac{2}{3}} \div 9^{\frac{1}{2}} = 9 \div 3 = 3$$

$$27^{\frac{2}{3}} \div 9^{\frac{1}{2}} = 3$$

17

底が異なる式の掛け算

$8^{\frac{2}{3}} \times 4^{-\frac{1}{2}}$ の値を求めよ。

答え 2

それぞれ先に計算する。

$$8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$$

$$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } 8^{\frac{2}{3}} \times 4^{-\frac{1}{2}} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$8^{\frac{2}{3}} \times 4^{-\frac{1}{2}} = 2$$

18

分数の負の有理数指数の累乗

$\left\{ \left(\frac{1}{16} \right)^{-\frac{1}{4}} \right\}^2$ の値を求めよ。

答え 4

まず中の負の指数を処理する。

$$\left(\frac{1}{16} \right)^{-\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$$

外側の2乗をかける。

$$\left\{ \left(\frac{1}{16} \right)^{-\frac{1}{4}} \right\}^2 = 2^2 = 4$$

$$\left\{ \left(\frac{1}{16} \right)^{-\frac{1}{4}} \right\}^2 = 4$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。対称式・大小比較・指数方程式など、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

対称式（2乗の利用）

$2^x + 2^{-x} = 3$ のとき、 $4^x + 4^{-x}$ の値を求めよ。

答え 7

$4^x = (2^x)^2$ 、 $4^{-x} = (2^{-x})^2$ なので、 $2^x + 2^{-x}$ を2乗した式とつながる。

$$(2^x + 2^{-x})^2 = 4^x + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} + 4^{-x} = 4^x + 4^{-x} + 2$$

($2^x \cdot 2^{-x} = 2^0 = 1$ を使った)

条件より $(2^x + 2^{-x})^2 = 3^2 = 9$ だから

$$9 = 4^x + 4^{-x} + 2$$

$$4^x + 4^{-x} = 9 - 2 = 7$$

$$4^x + 4^{-x} = 7$$

応2

対称式（3乗の利用・応1の続き）

$2^x + 2^{-x} = 3$ のとき、 $8^x + 8^{-x}$ の値を求めよ。

答え 18

$a = 2^x$ 、 $b = 2^{-x}$ とおくと $a + b = 3$ 、 $ab = 2^x \cdot 2^{-x} = 2^0 = 1$ 。

$8^x + 8^{-x} = a^3 + b^3$ なので、3乗の対称式の公式 $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ を使う。

$$a^3 + b^3 = 3^3 - 3 \times 1 \times 3 = 27 - 9 = 18$$

$$8^x + 8^{-x} = 18$$

応3

大小比較（底をそろえる）

$2^{\frac{1}{2}}$ 、 $4^{\frac{1}{3}}$ 、 $8^{\frac{1}{4}}$ をすべて底が2の指数の形に直すと、指数はそれぞれいくつか。3つの数値を求めよ。

$2^{\frac{1}{2}}$ の指数 $\frac{1}{2}$ $4^{\frac{1}{3}}$ の指数 $\frac{2}{3}$ $8^{\frac{1}{4}}$ の指数 $\frac{3}{4}$

3つとも底を2にそろえて比較する。 $4 = 2^2$ 、 $8 = 2^3$ を使う。

$2^{\frac{1}{2}}$ の指数はそのまま $\frac{1}{2}$ 。

$4^{\frac{1}{3}} = (2^2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$ より指数は $\frac{2}{3}$ 。

$8^{\frac{1}{4}} = (2^3)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}$ より指数は $\frac{3}{4}$ 。

底 $2 > 1$ の指数関数は指数が大きいほど値も大きいので、指数の大小をそのまま比べればよい。

$\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{2}{3} \approx 0.67$, $\frac{3}{4} = 0.75$ より $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ 。

指数は $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ 。よって $2^{\frac{1}{2}} < 4^{\frac{1}{3}} < 8^{\frac{1}{4}}$

応4

指数方程式（底をそろえて指数を比較）

$3^{2x+1} = 27^{x-1}$ を満たす x の値を求めよ。

$x = \underline{4}$

右辺を底3にそろえる。 $27 = 3^3$ より

$$27^{x-1} = (3^3)^{x-1} = 3^{3(x-1)} = 3^{3x-3}$$

底が同じ3で等しいので、指数どうしが等しい。

$$2x + 1 = 3x - 3$$

$$1 + 3 = 3x - 2x$$

$$x = 4$$

（検算：左辺の指数は $2 \times 4 + 1 = 9$ 、右辺の指数は $3 \times 4 - 3 = 9$ で一致）

$$x = 4$$

応5

複数の法則を組み合わせた計算

$\left(27^{\frac{2}{3}} - 8^{-\frac{1}{3}}\right) \times 4^{\frac{1}{2}}$ の値を求めよ。

答え $\underline{17}$

かっこの中を先に計算する。

$$27^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$$

$$8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{かっこの中：} 9 - \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$$

$$\text{外の掛け算：} 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\frac{17}{2} \times 2 = 17$$

$$\left(27^{\frac{2}{3}} - 8^{-\frac{1}{3}}\right) \times 4^{\frac{1}{2}} = 17$$