

指数関数・対数関数 まとめ

解答（全27問）

氏名 _____

得点 _____ / 27点

DRILL

まとめテスト（標準）

基本（1～15）

1

負の整数乗

4^{-2} の値を求めよ。

答え $1/16$

負の指数は、正の指数の逆数として計算する。

$$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

$$4^{-2} = \frac{1}{16}$$

2

累乗根（奇数・負の数）

 $\sqrt[3]{-125}$ の値を求めよ。答え -5

3乗根は奇数乗根なので、負の数にもただ1つの実数の根がある。

$$(-5)^3 = -125 \text{ より}$$

$$\sqrt[3]{-125} = -5$$

3

有理数指数（m/n形）

 $25^{\frac{3}{2}}$ の値を求めよ。答え 125

$$25^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{25})^3 = 5^3 = 125$$

$$25^{\frac{3}{2}} = 125$$

4

指数法則（掛け算→指数の足し算）

 $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}}$ の値を求めよ。答え 9

底が同じなので指数を足す。

$$3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 3^2 = 9$$

$$3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} = 9$$

5

指数方程式

 $2^x = 32$ を解け。

$$x = \underline{5}$$

 $32 = 2^5$ なので $2^x = 2^5$ 。

$$x = 5$$

6

指数不等式・底が1より大

 $3^x > 27$ の解は $x > \square$ の形になる。 $\square$ に入る数を答えよ。

$$\square = \underline{3}$$

 $27 = 3^3$ なので $3^x > 3^3$ 。底3は $3 > 1$ なので増加関数 → 向きはそのまま。

$$x > 3$$

7

大小比較（底が同じ、 $a > 1$ ）次のうち大きいのはどちらか。記号で答えよ。 ア： 3^{-1} イ： 3^2 大きいほう $\underline{\text{イ}}$ 底3は $3 > 1$ なので単調増加。指数を比べると $-1 < 2$ 。

$$\text{イ} \left(3^2 = 9 > 3^{-1} = \frac{1}{3} \right)$$

8

対数の定義

$\log_3 81$ の値を求めよ。

値 4

$3^4 = 81$ なので

$$\log_3 81 = 4$$

9

対数の性質（積）

$\log_2 3 + \log_2 \frac{16}{3}$ の値を求めよ。

値 4

積の性質でまとめる。

$$\log_2 3 + \log_2 \frac{16}{3} = \log_2 \left(3 \times \frac{16}{3} \right) = \log_2 16$$

$$= 4$$

10

対数の性質（商）

$\log_5 200 - \log_5 8$ の値を求めよ。

値 2

商の性質でまとめる。

$$\log_5 200 - \log_5 8 = \log_5 \frac{200}{8} = \log_5 25$$

$5^2 = 25$ なので

$$= 2$$

11

対数の性質（累乗＋商）

$2\log_3 6 - \log_3 4$ の値を求めよ。

値 2

累乗の性質で係数を指数に戻す。

$$2\log_3 6 = \log_3 6^2 = \log_3 36$$

これと引いて

$$\log_3 36 - \log_3 4 = \log_3 \frac{36}{4} = \log_3 9$$

$3^2 = 9$ なので

$$= 2$$

別解 先に積の性質で6を分解してもよい。 $6 = 2 \times 3$ より $2\log_3 6 = \log_3(2 \times 3)^2 = \log_3(4 \times 9) = \log_3 4 + \log_3 9$ 。これから $\log_3 4$ を引くと $\log_3 9 = 2$ で同じ結果になる。

12

底の変換公式

$\log_8 16$ の値を求めよ。

値 $4/3$

底の変換公式で底を2にそろえる。 $8 = 2^3$ 、 $16 = 2^4$ より

$$\log_8 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{4}{3}$$

$$\log_8 16 = \frac{4}{3}$$

13

対数方程式（基本）

$\log_4(x+1) = 2$ を解け。

$$x = \underline{15}$$

真数条件： $x+1 > 0$ より $x > -1$ 。

$$x+1 = 4^2 = 16 \rightarrow x = 15 \quad (x > -1 \text{ を満たす})$$

$$x = 15$$

14

対数不等式・真数条件に注意

$\log_2(x-3) < 4$ を解け。

$$\text{解の範囲： } \underline{3} < x < \underline{19}$$

真数条件： $x-3 > 0$ より $x > 3$ 。

$4 = \log_2 16$ より $\log_2(x-3) < \log_2 16$ 。底2は増加関数なので向きはそのまま：

$$x-3 < 16 \rightarrow x < 19$$

真数条件とあわせて

$$3 < x < 19$$

15

桁数

2^{15} の桁数を求めよ。

$$\underline{5} \text{ 桁}$$

$$\log_{10} 2^{15} = 15 \times 0.3010 = 4.515$$

$$4 \leq 4.515 < 5 \text{ なので } 10^4 \leq 2^{15} < 10^5。$$

$$\mathbf{5 \text{ 桁}} \quad (2^{15} = 32768)$$

16

おきかえ・2つの解

$9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$ を解け。解が2つあるときはコンマ区切りで入力せよ。

$$x = \underline{0,2}$$

$9^x = (3^x)^2$ なので $t = 3^x$ ($t > 0$) とおく。

$t^2 - 10t + 9 = 0$ 、 $(t - 1)(t - 9) = 0$ 、 $t = 1, 9$ 。どちらも $t > 0$ を満たすので両方採用。

$$3^x = 1 = 3^0 \Rightarrow x = 0$$

$$3^x = 9 = 3^2 \Rightarrow x = 2$$

$$x = 0, 2$$

17

おきかえ・不等式の範囲

$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 < 0$ を解け。解は $\square_1 < x < \square_2$ の形になる。

$$\square_1 = \underline{0} \quad \square_2 = \underline{2}$$

$4^x = (2^x)^2$ なので $t = 2^x$ ($t > 0$) とおく。

$t^2 - 5t + 4 < 0$ 、 $(t - 1)(t - 4) < 0$ 、 $1 < t < 4$ (このままで $t > 0$ も満たしている)。

$1 = 2^0$ 、 $4 = 2^2$ なので $2^0 < 2^x < 2^2$ 。底2は $2 > 1$ なので向きはそのまま。

$$0 < x < 2$$

18

対数方程式・真数条件で解を絞る

$\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$ を解け。

$$x = \underline{4}$$

真数条件： $x > 0$ かつ $x - 3 > 0$ より $x > 3$ 。

左辺をまとめる： $\log_2\{x(x - 3)\} = 2 \rightarrow x(x - 3) = 2^2 = 4$

$x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0 \rightarrow x = 4, -1$

$x = -1$ は真数条件 $x > 3$ を満たさないので除外。

$$x = 4$$

19

対数不等式・底が $0 < a < 1$

$\log_{\frac{1}{3}}(x - 1) \geq -2$ を解け。

解の範囲： $\underline{1} < x \leq \underline{10}$

真数条件： $x - 1 > 0$ より $x > 1$ 。

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$ より $-2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$ 。底 $\frac{1}{3}$ は $0 < \frac{1}{3} < 1$ なので減少関数 $\rightarrow$ 向きが**逆転**：

$$x - 1 \leq 9 \rightarrow x \leq 10$$

真数条件とあわせて

$$1 < x \leq 10$$

$\log_9 27 \times \log_3 81$ の値を求めよ。

値 6

$\log_9 27$ を底の変換公式で底3にそろえる。 $9 = 3^2$, $27 = 3^3$ より

$$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{3}{2}$$

$\log_3 81$ は $3^4 = 81$ より4。

かけ合わせると

$$\log_9 27 \times \log_3 81 = \frac{3}{2} \times 4 = 6$$

$$= 6$$

$2^{20} \times 5^{15}$ の桁数を求めよ。

17 桁

積・累乗の性質で常用対数をとる。

$$\begin{aligned} \log_{10}(2^{20} \times 5^{15}) &= 20 \log_{10} 2 + 15 \log_{10} 5 = 20 \times 0.3010 + 15 \times 0.6990 \\ &= 6.020 + 10.485 = 16.505 \end{aligned}$$

$$16 \leq 16.505 < 17 \text{ なので } 10^{16} \leq 2^{20} \times 5^{15} < 10^{17}。$$

17桁

0.2^8 は小数第何位に初めて0でない数字が現れるか求めよ。

小数第 6 位

$$\log_{10} 0.2^8 = 8 \log_{10} 0.2 = 8(\log_{10} 2 - 1) = 8(0.3010 - 1) = 8 \times (-0.6990) = -5.592$$

これを $-k + s$ ($0 \leq s < 1$) の形に書きなおす： $-5.592 = -6 + 0.408$ なので $k = 6$ 。

小数第6位に初めて0でない数字が現れる

$1 \leq x \leq 27$ のとき、関数 $y = (\log_3 x)^2 - 4 \log_3 x + 2$ の最大値・最小値を求めよ。またそれぞれのときの x の値も求めよ。

最大値 2 ($x = \underline{1}$) 最小値 -2 ($x = \underline{9}$)

真数条件： $1 \leq x \leq 27$ はすでに $x > 0$ を満たす。

$t = \log_3 x$ とおく。 $x = 1$ のとき $t = 0$ 、 $x = 27$ のとき $t = \log_3 27 = 3$ 。 x が1から27まで動くとき t は単調に増加するので $0 \leq t \leq 3$ 。

$y = t^2 - 4t + 2 = (t - 2)^2 - 2$ と平方完成できる。軸 $t = 2$ は区間 $[0, 3]$ の内側にあるので、そこで最小値をとる： $t = 2$ のとき $y = -2$ 。このとき $x = 3^2 = 9$ 。

最大値は区間の両端のうち軸から遠いほうで出る。 $t = 0$ のとき $y = (0 - 2)^2 - 2 = 2$ 、 $t = 3$ のとき $y = (3 - 2)^2 - 2 = -1$ 。 $2 > -1$ なので $t = 0$ で最大値2をとる。このとき $x = 3^0 = 1$ 。

最大値2 ($x = 1$)、最小値-2 ($x = 9$)

18^{10} の桁数を求めよ。（ $18 = 2 \times 3^2$ と考える）

13 桁

$$\log_{10} 18 = \log_{10}(2 \times 3^2) = \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3 = 0.3010 + 2 \times 0.4771 = 0.3010 + 0.9542 = 1.2552$$

$$\log_{10} 18^{10} = 10 \times 1.2552 = 12.552$$

$$12 \leq 12.552 < 13 \text{ なので } 10^{12} \leq 18^{10} < 10^{13}。$$

13桁

$3^a = 5$ 、 $5^b = 3$ のとき、 ab の値を求めよ。 $(a, b$ を対数を用いて表してから考えよ)

$$ab = \underline{1}$$

指数の式 $a^p = M$ は対数の式 $p = \log_a M$ に書き換えられる（この章の出発点となった関係）。

$$3^a = 5 \text{ より } a = \log_3 5$$

$$5^b = 3 \text{ より } b = \log_5 3$$

底の変換公式で、底と真数を入れ替えると逆数になるという関係 $(\log_a b = \frac{1}{\log_b a})$

を使うと、 $\log_5 3$ は $\log_3 5$ の逆数である。

$$b = \log_5 3 = \frac{1}{\log_3 5} = \frac{1}{a}$$

よって

$$ab = a \times \frac{1}{a} = 1$$

別解 底の変換公式を底10で直接使ってもよい。 $a = \log_3 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3}$ 、 $b =$

$\log_5 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 5}$ なので、かけ合わせると $ab = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \times \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 5} = 1$ 。 $\log_{10} 3$ や $\log_{10} 5$ の具体的な値を知らなくても、約分だけで1になることがわかる。

$$ab = 1$$

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1 指数関数 $y = a^x$ と対数関数 $y = \log_a x$ が「互いに逆関数」の関係にあることを、具体的な点の対応とグラフの対称性の観点から説明せよ。

例として底が2の場合を考える。指数関数 $y = 2^x$ に $x = 3$ を代入すると $y = 2^3 = 8$ なので、このグラフは点(3, 8)を通る。一方、対数の定義 $a^p = M \iff p = \log_a M$ にあてはめると、 $2^3 = 8$ は $\log_2 8 = 3$ と書き換えられるので、対数関数 $y = \log_2 x$ は点(8, 3)を通る。

この2つの点(3, 8)と(8, 3)を見比べると、 x 座標と y 座標がちょうど入れ替わった関係になっている。これは指数関数上のどの点についても同じことが言え、指数関数 $y = a^x$ 上の点(s, t) (つまり $a^s = t$) に対して、対数の定義から $s = \log_a t$ が成り立つので、対数関数 $y = \log_a x$ は必ず点(t, s)を通る。

一般に、座標平面上で点(s, t)と点(t, s)は、直線 $y = x$ に関して線対称の位置にある(直線 $y = x$ を折り目にして折ると2点がぴったり重なる)。指数関数のグラフ上のすべての点について、 x 座標と y 座標を入れ替えた点が対数関数のグラフ上に乗るということは、対数関数のグラフ全体が、指数関数のグラフを直線 $y = x$ に関して折り返した形になっているということにほかならない。

指数関数上の点(s, t)に対して対数関数は点(t, s)を通るという座標の入れ替えの関係があり、これは直線 $y=x$ に関する線対称を意味する。だから両者のグラフは $y=x$ について線対称であり、互いに逆関数の関係にある。

記2 指数の意味を0・負の数・分数へと広げてから対数を定義するまでの流れを、
 $a^p = M \iff p = \log_a M$ という関係を軸にして、この章全体の流れとしてまとめよ。

この章は、 $a^p = M$ という1つの関係式の中で、何が既知で何を求めたいのかを段階的に変えていく構成になっている。

はじめの「指数の拡張」では、 a （底）と p （指数）が与えられたときに M を求める計算を、 p が正の整数の場合から0・負の整数・分数の場合にまで広げた。 $a^0 = 1$ や $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 、 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ といった定義は、指数が1変化するたびに値が一定の倍率で変わるという規則性をそのまま延長したものであり、これによって p がどんな有理数であっても M がただ1通りに決まるようになった。

続く「指数関数とグラフ」では、 a を固定して p （ x と書き換える）を変数として動かし、 M （ y と書き換える）がどう変化するかをグラフで観察した。ここで、底 a が1より大きいのか0と1の間かによって、 x が大きくなると y も大きくなる（単調増加）か小さくなる（単調減少）かが決まることを確認した。この単調性が、指数方程式・不等式を解く際の判断基準になった。

ここまでで「 a と p から M を求める」計算は完全に身についたので、次の「対数とその性質」では、逆に「 a と M から p を求める」という向きの問いを考える。この p を表す記号が $\log_a M$ であり、 $a^p = M \iff p = \log_a M$ という関係は、同じ3つの数 a, p, M の間の対応を、指数の言葉と対数の言葉のどちらで表すかの違いにすぎない。指数法則 $a^p \times a^q = a^{p+q}$ などをこの対応にあてはめれば、対数の積・商・累乗の性質がそのまま導ける。

最後の「対数関数・常用対数」では、指数関数のときと同じように $x = M$ を変数として動かし $y = \log_a x$ のグラフを調べた。指数関数で x と y の役割だった p と M が、対数関数では逆になっているので、両者のグラフは x と y を入れ替えた関係、つまり直線 $y = x$ に関して線対称になる（記1の内容）。底を10に固定した常用対数は、 $\log_{10} N$ の整数部分・小数部分を読むことで、 N の桁数や小数首位を求める道具として応用された。

$a^p=M$ という1つの関係式について、 p から M を求める計算（指数の拡張・指数関数）を先に固め、その逆に M から p を求める記号として対数を定義し（対数の性質・対数関数）、最後に底10に固定した常用対数で桁数などに応用する、という一直線の流れでこの章は構成されている。



EXAM

共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 8分／配点 20点

あるボールを高さ256cmから落とすと、跳ね返るたびに直前の高さの $\frac{3}{4}$ 倍の高さまで跳ね返るという。 n 回目に跳ね返った直後の高さを h_n cmとする。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「1回目に跳ね返る高さ h_1 は、最初の高さ256cmに $\frac{3}{4}$ を掛ければ求まるね。」
 太郎「はい。 $h_1 = 256 \times \frac{3}{4} = 192$ ですね。2回目はさらに $\frac{3}{4}$ 倍だから $h_2 = 192 \times \frac{3}{4} = 144$ になります。」
 先生「そう。ということは、 h_n を n を使った式でまとめて表せそうだね。」

(1)

h_n を n の式で表すと、 $h_n = \boxed{\text{アイウ}} \times \left(\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \right)^n$ となる。アイウ、エ、オの値をそれぞれ求めよ。

アイウ 256 エ 3 オ 4

跳ね返るたびに直前の高さに $\frac{3}{4}$ を掛けるので、最初の高さ256cmに $\frac{3}{4}$ を n 回掛けた値が h_n になる。

$$h_n = 256 \times \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

(検算： $n = 1$ のとき $256 \times \frac{3}{4} = 192$ 、 $n = 2$ のとき $256 \times \left(\frac{3}{4} \right)^2 = 256 \times \frac{9}{16} = 144$ 。会話文の値と一致する。)

$$h_n = 256 \times \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

(2)

先生「 h_n が初めて100cmを下回るのが何回目かを知りたいときは、不等式 $256 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n < 100$ を解けばいい。でも $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ のままでは指数を求めにくいから、常用対数を使って指数を前に出そう。」

$\log_{10} \frac{3}{4} = \log_{10} 3 - \log_{10} 4$ に、 $\log_{10} 3 = 0.4771$, $\log_{10} 4 = 0.6021$ を代入すると、 $\log_{10} \frac{3}{4} = -0.$ カキクケ となる ($\log_{10} 4$ は $2 \log_{10} 2$ に置き換えず、ここで与えた 0.6021 をそのまま使うこと)。カキクケに入る数を求めよ。

カキクケ 1250

商の性質を使って $\log_{10} \frac{3}{4}$ を分解する。

$$\log_{10} \frac{3}{4} = \log_{10} 3 - \log_{10} 4 = 0.4771 - 0.6021 = -0.1250$$

底 $\frac{3}{4}$ は $0 < \frac{3}{4} < 1$ なので、この値が負になるのは自然 ($\frac{3}{4}$ を何回も掛けると値はどんどん小さくなっていく)。

$$\log_{10} \frac{3}{4} = -0.1250$$

(3)

(2)の結果と $\log_{10} \frac{100}{256} = 2 - 8 \log_{10} 2 = 2 - 8 \times 0.3010 = -0.408$ を用いると、不等式 $256 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n < 100$ は $n \log_{10} \frac{3}{4} < \log_{10} \frac{100}{256}$ 、すなわち $-0.1250n < -0.408$ と書き換えられる。これを解くと、 h_n が初めて100cmを下回るのは コ 回目の跳ね返りである。整数で答えよ。

コ 4

$-0.1250n < -0.408$ の両辺を -0.1250 (負の数) で割ると、不等号の向きが変わることに注意して

$$n > \frac{-0.408}{-0.1250} = 3.264$$

n は跳ね返りの回数 (自然数) なので、 $n > 3.264$ を満たす最小の自然数は $n = 4$ 。

$$\begin{aligned} \text{(検算：)} h_3 &= 256 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 256 \times \frac{27}{64} = 108\text{cm (まだ100cm以上)。} \\ h_4 &= 256 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 256 \times \frac{81}{256} = 81\text{cm (初めて100cmを下回る。)} \end{aligned}$$

4回目の跳ね返りで初めて100cmを下回る

大問2 目標時間 8分／配点 20点

太郎さんは、あるSNSアカウントのフォロワー数を毎週記録している。今週のフォロワー数は500人で、毎週1.2倍ずつ増えているという。 x 週間後のフォロワー数を y 人すると、 $y = 500 \times 1.2^x$ と表せる。太郎さんは「フォロワー数が2000人を超えるのは何週間後だろう」と考えている。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「 1.2^x のままでは指数方程式として簡単には解けないね。こういうときは、両辺の常用対数をとって、指数を前に出す対数の性質を使うといいよ。」

- (1) $500 \times 1.2^x > 2000$ を変形すると、 $1.2^x > \boxed{\text{ア}}$ となる。さらに両辺の常用対数をとると、 $x \log_{10} 1.2 > \log_{10} \boxed{\text{ア}}$ 、すなわち $x > \frac{\log_{10} \boxed{\text{ア}}}{\log_{10} 1.2}$ ($\log_{10} 1.2 > 0$ なので不等号の向きはそのまま) となる。アに入る数を求めよ。

ア 4

両辺を500で割る。

$$500 \times 1.2^x > 2000$$

$$1.2^x > \frac{2000}{500} = 4$$

底1.2は $1.2 > 1$ なので指数関数は単調増加、両辺は正なので常用対数をとっても不等号の向きは変わらない。

$$1.2^x > 4$$

(2)

$\log_{10} 1.2 = \log_{10} \frac{6}{5} = \log_{10} 6 - \log_{10} 5 = 0.$ イウエオである。

$\log_{10} 6 = 0.7781$, $\log_{10} 5 = 0.6990$ を用いて、イウエオに入る数を求めよ。

イウエオ 0791

商の性質で $1.2 = \frac{6}{5}$ を分解する。

$$\log_{10} 1.2 = \log_{10} \frac{6}{5} = \log_{10} 6 - \log_{10} 5 = 0.7781 - 0.6990 = 0.0791$$

$$\log_{10} 1.2 = 0.0791$$

(3)

(1)より $x > \frac{\log_{10} 4}{\log_{10} 1.2}$ である。 $\log_{10} 4 = 0.6021$ と(2)で求めた値を用いると、

フォロワー数が2000人を超えるのは カ 週間後である。整数で答えよ。

カ 8

(1)(2)の結果を代入する。

$$x > \frac{\log_{10} 4}{\log_{10} 1.2} = \frac{0.6021}{0.0791} = 7.61 \dots$$

x は週数（自然数）なので、 $x > 7.61 \dots$ を満たす最小の自然数は $x = 8$ 。

(検算： $1.2^7 \approx 3.583$ より7週間後は約 $500 \times 3.583 = 1791$ 人（まだ2000人未満）。 $1.2^8 \approx 4.300$ より8週間後は約 $500 \times 4.300 = 2150$ 人（初めて2000人を超える）。)

8週間後に初めてフォロワー数が2000人を超える