

高次方程式

解答（全21問）

氏名 _____

得点 _____ / 21点

DRILL

練習問題（全16問）

基本（1～6）

1

モニック・全て整数解

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ を解け。

解 $x = \underline{1, 2, 3}$

定数項 6 の約数を調べる。 $P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$ より $x = 1$ が解。

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$x = 1, 2, 3$

2

モニック・全て整数解

 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ を解け。解 $x = \underline{-2, 1, 3}$ $P(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$ より $x = 1$ が解。

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6) = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$$

$$x = -2, 1, 3$$

3

負の解を含む

 $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ を解け。解 $x = \underline{-2, -1, 2}$ $P(-1) = -1 + 1 + 4 - 4 = 0$ より $x = -1$ が解。

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x + 1)(x^2 - 4) = (x + 1)(x - 2)(x + 2)$$

$$x = -2, -1, 2$$

4

候補を複数試す

 $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ を解け。解 $x = \underline{-2, 2, 3}$ $P(1) = 1 - 3 - 4 + 12 = 6 \neq 0$ 。 $P(2) = 8 - 12 - 8 + 12 = 0$ より $x = 2$ が解。

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 2)(x^2 - x - 6) = (x - 2)(x - 3)(x + 2)$$

$$x = -2, 2, 3$$

5

 x^2 の項がない $x^3 - 7x + 6 = 0$ を解け。解 $x = \underline{-3, 1, 2}$ $P(1) = 1 - 7 + 6 = 0$ より $x = 1$ が解。

$$x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x^2 + x - 6) = (x - 1)(x + 3)(x - 2)$$

$$x = -3, 1, 2$$

6

最高次の係数が1でない

 $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$ を解け。解 $x = \underline{-1, -1/2, 2}$ 候補は $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$ 。 $P(2) = 16 - 4 - 10 - 2 = 0$ より $x = 2$ が解。

$$\text{組立除法で商は } 2x^2 + 3x + 1 = (2x + 1)(x + 1)$$

$$x = -1, -\frac{1}{2}, 2$$

標準 (7~12)

7

実数解1個+虚数解2個

 $x^3 + 1 = 0$ を解け。実数解 $x = \underline{-1}$ (虚数解は解説で確認)

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$x = -1 \text{ または } x^2 - x + 1 = 0$$

$$\text{判別式} = 1 - 4 = -3 < 0 \text{ なので、解の公式より } x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$x = -1, \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

8

実数解1個+虚数解2個

 $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ を解け。実数解 $x = \underline{1}$ (虚数解は解説で確認) $P(1) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$ より $x = 1$ が解。組立除法で商は $x^2 + 1$ 。 $x^2 + 1 = 0$ より $x = \pm i$

$$x = 1, \pm i$$

9

実数解1個+虚数解2個

 $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$ を解け。実数解 $x = \underline{-2}$ (虚数解は解説で確認) $P(-2) = -8 + 8 - 2 + 2 = 0$ より $x = -2$ が解。組立除法で商は $x^2 + 1$ 。 $x^2 + 1 = 0$ より $x = \pm i$

$$x = -2, \pm i$$

10

4次方程式・置き換え型

 $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ を解け。($y = x^2$ と置き換えるとよい)解 $x = \underline{-3, -2, 2, 3}$ $y = x^2$ とおくと $y^2 - 13y + 36 = 0$ 、 $(y - 4)(y - 9) = 0$ より $y = 4, 9$ 。 $x^2 = 4$ より $x = \pm 2$ 、 $x^2 = 9$ より $x = \pm 3$

$$x = -3, -2, 2, 3$$

11

4次方程式・実数解と虚数解が混在

 $x^4 - 1 = 0$ を解け。実数解 $x = \underline{-1, 1}$ (虚数解は解説で確認)

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

$$x^2 - 1 = 0 \text{ より } x = \pm 1, \quad x^2 + 1 = 0 \text{ より } x = \pm i$$

$$x = -1, 1, \pm i$$

12

最高次の係数が1でない・虚数解あり

 $3x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0$ を解け。実数解 $x = \underline{2/3}$ (虚数解は解説で確認)

$$\text{候補は } \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}。P\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \frac{8}{27} - 2 \cdot \frac{4}{9} + 3 \cdot \frac{2}{3} - 2 = \frac{8}{9} - \frac{8}{9} +$$

$$2 - 2 = 0$$

$$3x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = (3x - 2)(x^2 + 1) \quad x^2 + 1 = 0 \text{ より } x = \pm i$$

$$x = \frac{2}{3}, \pm i$$

挑戦 (13~16)

13

4次方程式・因数定理を2回使う

$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$ を解け。

解 $x = \underline{-2, -1, 2, 3}$

$P(-1) = 1 + 2 - 7 - 8 + 12 = 0$ より $x = -1$ が解。組立除法で商は $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ 。

この3次式にもう一度因数定理を使う。 $Q(2) = 8 - 12 - 8 + 12 = 0$ より $x = 2$ が解。

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 2)(x^2 - x - 6) = (x - 2)(x - 3)(x + 2)$$

$$\text{まとめると } x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = (x + 1)(x - 2)(x - 3)(x + 2)$$

$$x = -2, -1, 2, 3$$

14

実数解1個+虚数解2個・最高次の係数チェック

$x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$ を解け。

実数解 $x = \underline{2}$ (虚数解は解説で確認)

$P(2) = 8 - 16 + 12 - 4 = 0$ より $x = 2$ が解。

組立除法で商は $x^2 - 2x + 2$ 。判別式 $= 4 - 8 = -4 < 0$ なので

$$\text{解の公式より } x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i$$

$$x = 2, 1 \pm i$$

15

 ω の性質の利用

ω を $x^3 = 1$ の虚数解の1つとすると、 $\omega^{10} + \omega^5 + 1$ の値を求めよ。

値 0

$\omega^3 = 1$ を使って指数を3で割った余りまで落とす。

$10 = 3 \times 3 + 1$ なので $\omega^{10} = \omega^1 = \omega$

$5 = 3 \times 1 + 2$ なので $\omega^5 = \omega^2$

よって $\omega^{10} + \omega^5 + 1 = \omega^2 + \omega + 1$

$$\omega^{10} + \omega^5 + 1 = 0$$

16

4次方程式・因数定理2回+虚数解

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 3x - 4 = 0$ を解け。

実数解 $x =$ -1,1 (虚数解は解説で確認)

$P(1) = 1 - 3 + 3 + 3 - 4 = 0$ より $x = 1$ が解。組立除法で商は $x^3 - 2x^2 + x + 4$ 。

この3次式に再び因数定理を使う。 $Q(-1) = -1 - 2 - 1 + 4 = 0$ より $x = -1$ が解。

$$x^3 - 2x^2 + x + 4 = (x + 1)(x^2 - 3x + 4)$$

$x^2 - 3x + 4 = 0$ の判別式は $9 - 16 = -7 < 0$ なので、解の公式より $x =$

$$\frac{3 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

まとめると実数解は $x = 1, -1$ 、虚数解は $x = \frac{3 \pm \sqrt{7}i}{2}$

$$x = 1, -1, \frac{3 + \sqrt{7}i}{2}, \frac{3 - \sqrt{7}i}{2}$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。 ω の計算と、複素数の解から係数を決定する問題に挑戦しよう。

応1

ω の計算・指数を3で割る

ω を $x^3 = 1$ の虚数解の1つとすると、 $\omega^{2024} + \omega^{1012} + 1$ の値を求めよ。

値 0

$\omega^3 = 1$ より、指数を3で割った余りだけが結果を左右する。

$$2024 = 3 \times 674 + 2 \text{ なので } \omega^{2024} = \omega^2$$

$$1012 = 3 \times 337 + 1 \text{ なので } \omega^{1012} = \omega^1 = \omega$$

$$\text{よって } \omega^{2024} + \omega^{1012} + 1 = \omega^2 + \omega + 1$$

$$\omega^{2024} + \omega^{1012} + 1 = 0$$

応2

ω の計算・式を展開してから性質を使う

ω を $x^3 = 1$ の虚数解の1つとすると、 $(1 + \omega)(1 + \omega^2)$ の値を求めよ。

値 1

$$\text{展開すると } (1 + \omega)(1 + \omega^2) = 1 + \omega^2 + \omega + \omega^3$$

$$= (1 + \omega + \omega^2) + \omega^3$$

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0 \text{ と } \omega^3 = 1 \text{ を使うと}$$

$$= 0 + 1 = 1$$

$$(1 + \omega)(1 + \omega^2) = 1$$

応3

複素数の解から係数決定（モニック）

$x^3 + ax^2 + bx + 4 = 0$ (a, b は実数の定数) の解の1つが $1 + i$ であるとき、 a, b の値と、他の実数解を求めよ。

$$a = \underline{0} \quad b = \underline{-2} \quad \text{実数解 } x = \underline{-2}$$

係数がすべて実数なので、共役複素数 $1 - i$ も解。

$$\text{この2つを解にもつ2次式は } (x - (1 + i))(x - (1 - i)) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$$

残る実数解を r とすると、もとの3次式は

$$x^3 + ax^2 + bx + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x - r)$$

$$\text{右辺を展開すると } x^3 - (r + 2)x^2 + (2r + 2)x - 2r$$

$$\text{定数項を比較して } -2r = 4 \text{ より } r = -2$$

$$x^2 \text{ の係数を比較して } a = -(r + 2) = -(-2 + 2) = 0$$

$$x \text{ の係数を比較して } b = 2r + 2 = 2 \times (-2) + 2 = -2$$

$$a = 0, b = -2, \text{ 実数解 } x = -2 \text{ (他の解は } 1 \pm i)$$

応4

複数の解から係数決定（解と係数の関係）

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c は実数の定数) の解の1つが $2 - i$ であり、他の解の1つが 3 であるとき、 a, b, c の値を求めよ。

$$a = \underline{-7} \quad b = \underline{17} \quad c = \underline{-15}$$

係数がすべて実数なので、共役複素数 $2 + i$ も解。3つの解は $2 - i, 2 + i, 3$ 。

解と係数の関係（3次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ について）を使う。

$$\text{和: } (2 - i) + (2 + i) + 3 = 7 = -a \text{ より } a = -7$$

$$\text{積の和: } (2 - i)(2 + i) + (2 - i) \cdot 3 + (2 + i) \cdot 3 = (4 + 1) + (6 - 3i) + (6 + 3i) = 5 + 12 = 17 = b$$

$$\text{積: } (2 - i)(2 + i) \times 3 = 5 \times 3 = 15 = -c \text{ より } c = -15$$

(検算: $x = 3$ を代入すると $27 - 63 + 51 - 15 = 0$ となり成立)

$$a = -7, b = 17, c = -15$$

$2x^3 + ax^2 + bx + 10 = 0$ (a, b は実数の定数) の解の1つが $1 + 2i$ であるとき、 a, b の値と、他の実数解を求めよ。

$a = \underline{-2} \quad b = \underline{6} \quad \text{実数解 } x = \underline{-1}$

係数がすべて実数なので、共役複素数 $1 - 2i$ も解。

この2つを解にもつ2次式は $(x - (1 + 2i))(x - (1 - 2i)) = (x - 1)^2 + 4 = x^2 - 2x + 5$

最高次の係数が2で、残る実数解を r とすると

$$2x^3 + ax^2 + bx + 10 = 2(x^2 - 2x + 5)(x - r)$$

右辺を展開すると $2x^3 - 2(r + 2)x^2 + 2(2r + 5)x - 10r$

定数項を比較して $-10r = 10$ より $r = -1$

x^2 の係数を比較して $a = -2(r + 2) = -2(-1 + 2) = -2$

x の係数を比較して $b = 2(2r + 5) = 2(2 \times (-1) + 5) = 6$

$a = -2, b = 6$ 、実数解 $x = -1$ (他の解は $1 \pm 2i$)