

剰余の定理・因数定理

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～7）

1

剰余の定理・基本

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ を $x - 2$ で割った余りを求めよ。

余り 1

剰余の定理より、余りは $P(2)$ 。

$$P(2) = 8 - 8 + 6 - 5 = 1$$

余りは 1

2

x+aで割る

$P(x) = x^3 + 3x^2 - x + 2$ を $x + 1$ で割った余りを求めよ。

余り 5

$x + 1 = x - (-1)$ なので、余りは $P(-1)$ 。

$$P(-1) = -1 + 3 + 1 + 2 = 5$$

余りは 5

3

剰余の定理・基本

$P(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 3$ を $x - 1$ で割った余りを求めよ。

余り 2

$$P(1) = 2 - 1 + 4 - 3 = 2$$

余りは 2

4

4次式でも同じ

$P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$ を $x - 1$ で割った余りを求めよ。

余り -1

何次式であっても、剰余の定理は同じように使える。

$$P(1) = 1 - 3 + 2 - 1 = -1$$

余りは -1

5

割り切れる場合

$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ を $x - 2$ で割った余りを求めよ。

余り 0

$$P(2) = 8 - 16 + 10 - 2 = 0$$

余りが 0 なので、 $x - 2$ は $P(x)$ の因数である（因数定理）。

余りは 0

6

係数が1でない1次式

$P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 4$ を $2x - 1$ で割った余りを求めよ。

余り $\frac{33}{8}$

$2x - 1 = 0$ より $x = \frac{1}{2}$ 。余りは $P\left(\frac{1}{2}\right)$ 。

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 4 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 4 = \frac{33}{8}$$

余りは $\frac{33}{8}$ (= 4.125)

$P(x) = x^3 + kx^2 - 5x + 6$ が $x - 1$ で割り切れるとき、定数 k の値を求めよ。

$$k = \underline{-2}$$

割り切れる条件は、因数定理より $P(1) = 0$ 。

$$P(1) = 1 + k - 5 + 6 = k + 2 = 0$$

$$k = -2$$

標準 (8~14)

$P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ は $x = 1$ が $P(x) = 0$ の解である。これを因数分解すると $(x - 1)(x - a)(x - b)$ ($a < b$) の形になる。 a, b の値を求めよ。

$$a = \underline{-2} \quad b = \underline{4}$$

$P(1) = 1 - 3 - 6 + 8 = 0$ を確認済み。組立除法 ($a = 1$ 、係数 $1, -3, -6, 8$) で割ると、商は $x^2 - 2x - 8$ 。

$$x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$$

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 4)、すなわち a = -2, b = 4$$

9

組立除法で商と余り

$P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 7$ を組立除法で $x - 2$ で割り、商を $x^2 + px + q$ 、余りを r とするとき、 p, q, r の値を求めよ。

$$p = \underline{4} \quad q = \underline{5} \quad r = \underline{17}$$

$a = 2$ 、係数 $1, 2, -3, 7$ で組立除法。

1 を降ろす。 $1 \times 2 + 2 = 4$ 。 $4 \times 2 + (-3) = 5$ 。 $5 \times 2 + 7 = 17$ 。

商は $x^2 + 4x + 5$ ($p = 4, q = 5$)、余りは $r = 17$

10

2次式で割った余り

整式 $P(x)$ を $x - 1$ で割ると余りが 4 、 $x + 1$ で割ると余りが -2 となる。

$P(x)$ を $(x - 1)(x + 1)$ で割った余り $ax + b$ の a, b を求めよ。

$$a = \underline{3} \quad b = \underline{1}$$

余りを $ax + b$ とおく。 $x = 1$ を代入して $a + b = 4$ 。 $x = -1$ を代入して $-a + b = -2$ 。

2式を足すと $2b = 2$ より $b = 1$ 。 $a + b = 4$ に代入して $a = 3$ 。

余りは $3x + 1$ ($a = 3, b = 1$)

11

2次式で割った余り

整式 $P(x)$ を $x - 2$ で割ると余りが 5 、 $x - 3$ で割ると余りが 9 となる。 $P(x)$ を $(x - 2)(x - 3)$ で割った余り $ax + b$ の a, b を求めよ。

$$a = \underline{4} \quad b = \underline{-3}$$

余りを $ax + b$ とおく。 $x = 2$ で $2a + b = 5$ 、 $x = 3$ で $3a + b = 9$ 。

下の式から上の式を引くと $a = 4$ 。 $2a + b = 5$ に代入して $b = -3$ 。

余りは $4x - 3$ ($a = 4, b = -3$)

12

組立除法を2回使う

$P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$ は $x = 1$ と $x = -1$ がともに $P(x) = 0$ の解である。 $P(x)$ を $(x - 1)(x + 1)$ で割った商を $x^2 + px + q$ とするとき、 p, q を求めよ。

$$p = \underline{-5} \quad q = \underline{6}$$

まず $x - 1$ で組立除法 (係数 $1, -5, 5, 5, -6, a = 1$) : 商は $x^3 - 4x^2 + x + 6$ 、余り 0 。

続けてこの商を $x + 1$ で組立除法 (係数 $1, -4, 1, 6, a = -1$) : 商は $x^2 - 5x + 6$ 、余り 0 。

$$p = -5, q = 6 \text{ (商は } x^2 - 5x + 6 \text{)}$$

13

組立除法+因数分解

方程式 $x^3 - 13x + 12 = 0$ を因数定理と組立除法で解いたとき、最も大きい解を求めよ。

最大の解 $\underline{3}$

$P(1) = 1 - 13 + 12 = 0$ より $x - 1$ が因数。組立除法 (係数 $1, 0, -13, 12, a = 1$) で商は $x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3)$ 。

よって $(x - 1)(x + 4)(x - 3) = 0$ より解は $x = 1, -4, 3$ 。

最も大きい解は 3

$P(x) = x^3 - 2x^2 + bx + 6$ が $x - 3$ で割り切れるとき、定数 b の値を求めよ。また、そのときの方程式 $P(x) = 0$ の他の解をすべて求めよ（コンマ区切りで入力）。

$b = \underline{-5}$ 他の解 $\underline{-2, 1}$

因数定理より $P(3) = 0$ 。

$$P(3) = 27 - 18 + 3b + 6 = 15 + 3b = 0 \implies b = -5$$

このとき $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 。組立除法（係数 $1, -2, -5, 6, a = 3$ ）で商は $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$ 。

$b = -5$ 、他の解は $x = -2, 1$

挑戦（15～18）

整式 $P(x)$ を $x^2 - 1$ で割ると余りが $3x + 2$ である。このとき $P(x)$ を $x - 1$ で割った余りと、 $x + 1$ で割った余りをそれぞれ求めよ。

$x - 1$ で割った余り $\underline{5}$ $x + 1$ で割った余り $\underline{-1}$

$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ なので、商を $Q(x)$ として

$$P(x) = (x - 1)(x + 1)Q(x) + 3x + 2$$

$x = 1$ を代入すると $(x - 1)$ の部分が消えて $P(1) = 3 \times 1 + 2 = 5$ 。これがそのまま $x - 1$ で割った余り。

$x = -1$ を代入すると $(x + 1)$ の部分が消えて $P(-1) = 3 \times (-1) + 2 = -1$ 。これが $x + 1$ で割った余り。

$x - 1$ で割った余りは 5 、 $x + 1$ で割った余りは -1

16

2条件から係数決定 (4次式)

$P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + ax + b$ が $x - 1$ と $x + 2$ の両方で割り切れるとき、定数 a, b の値を求めよ。

$$a = \underline{-4} \quad b = \underline{4}$$

因数定理より $P(1) = 0$ かつ $P(-2) = 0$ 。

$$P(1) = 1 + 2 - 3 + a + b = a + b = 0$$

$$P(-2) = 16 - 16 - 12 - 2a + b = -12 - 2a + b = 0 \implies -2a + b = 12$$

$a + b = 0$ より $b = -a$ 。 $-2a + (-a) = 12$ より $-3a = 12$ 、 $a = -4$ 、 $b = 4$ 。

$$a = -4, b = 4$$

17

2つの余り条件から係数決定

$P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$ を $x - 1$ で割ると余りが -2 、 $x - 2$ で割ると余りが 0 となる。定数 a, b の値を求めよ。

$$a = \underline{-4} \quad b = \underline{7}$$

$$P(1) = 1 + a + b - 6 = a + b - 5 = -2 \implies a + b = 3$$

$$P(2) = 8 + 4a + 2b - 6 = 4a + 2b + 2 = 0 \implies 2a + b = -1$$

下の式から上の式を引くと $a = -4$ 。 $a + b = 3$ に代入して $b = 7$ 。

$$a = -4, b = 7$$

整式 $P(x)$ を $x^2 + x - 2$ で割ると余りが $4x + 1$ である。 $P(x)$ を $x - 1$ で割った余りと $x + 2$ で割った余りの和を求めよ。

和 -2

$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$ なので、 $x = 1$, $x = -2$ を余りの式 $4x + 1$ にそれぞれ代入すれば、 $x - 1$ で割った余り・ $x + 2$ で割った余りが直接わかる。

$$x - 1 \text{ で割った余り} : P(1) = 4 \times 1 + 1 = 5$$

$$x + 2 \text{ で割った余り} : P(-2) = 4 \times (-2) + 1 = -7$$

$$\text{和は } 5 + (-7) = -2。$$

和は -2

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

($x-1$)²で割った余り・二項定理の利用

$P(x) = x^{10}$ を $(x-1)^2$ で割った余りを $ax+b$ とするとき、 a, b の値を求めよ。
($t = x-1$ と置き換えて $(t+1)^{10}$ を二項定理で展開し、 t^2 以上の項を無視すればよい)

$$a = \underline{10} \quad b = \underline{-9}$$

$t = x-1$ とおくと $x = t+1$ 。二項定理で展開すると

$$x^{10} = (t+1)^{10} = t^{10} + {}_{10}C_9 t^9 + \cdots + {}_{10}C_1 t + {}_{10}C_0$$

$(x-1)^2 = t^2$ で割った余りを考えるので、 t^2 以上の項はすべて $(x-1)^2$ で割り切れて消える。残るのは t の1次以下の項だけ。

$${}_{10}C_1 t + {}_{10}C_0 = 10t + 1$$

これを $t = x-1$ に戻すと

$$10(x-1) + 1 = 10x - 9$$

余りは $10x - 9$ ($a = 10, b = -9$)

応2

2条件から2次式で割った余り

整式 $P(x)$ を $x - 1$ で割ると余りが **3**、 $x - 2$ で割ると余りが **5** であるとき、 $P(x)$ を $(x - 1)(x - 2)$ で割った余り $ax + b$ の a, b を求めよ。

$$a = \underline{\mathbf{2}} \quad b = \underline{\mathbf{1}}$$

余りを $ax + b$ とおく。

$$x = 1 : a + b = 3$$

$$x = 2 : 2a + b = 5$$

下の式から上の式を引くと $a = 2$ 。 $a + b = 3$ に代入して $b = 1$ 。

余りは $2x + 1$ ($a = 2, b = 1$)

方程式 $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$ を、因数定理と組立除法を使ってすべて解け。解を小さい順にコンマ区切りで入力せよ。

解（小さい順） -2,-1,1,3

$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ とする。定数項 6 の約数から試すと

$$P(1) = 1 - 1 - 7 + 1 + 6 = 0, \quad P(-1) = 1 + 1 - 7 - 1 + 6 = 0$$

なので $x - 1$ と $x + 1$ がともに因数。

組立除法で $x - 1$ で割る（係数 1, -1, -7, 1, 6、 $a = 1$ ）：商は $x^3 - 7x - 6$ 、余り 0。

続けてこの商を $x + 1$ で割る（係数 1, 0, -7, -6、 $a = -1$ ）：商は $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$ 、余り 0。

よって $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 2)$ 、解は $x = 1, -1, 3, -2$ 。

解を小さい順に並べると $x = -2, -1, 1, 3$

整式 $P(x)$ を $(x-2)^2$ で割ると余りが $5x-3$ 、 $x+1$ で割ると余りが 10 である。 $P(x)$ を $(x-2)^2(x+1)$ で割った余りを ax^2+bx+c とするとき、 a, b, c の値を求めよ。

$$a = \underline{2} \quad b = \underline{-3} \quad c = \underline{5}$$

求める余りを $R(x) = ax^2 + bx + c$ とおく（割る式が3次式なので余りは高々2次式）。商を $Q(x)$ として

$$P(x) = (x-2)^2(x+1)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

この式は $(x-2)^2$ でも割り切れる部分（左の項）と余り $R(x)$ に分かれているので、 $R(x)$ を $(x-2)^2$ で割った余りは、 $P(x)$ を $(x-2)^2$ で割った余りと一致し $5x-3$ になる。また $R(x)$ を $x+1$ で割った余り（ $R(-1)$ ）は、 $P(x)$ を $x+1$ で割った余りと一致し 10 になる。

$R(x) - (5x-3)$ は $(x-2)^2$ で割り切れる2次式なので、定数 k を使って $R(x) = 5x-3 + k(x-2)^2$ と書ける。

これを展開すると $R(x) = kx^2 + (5-4k)x + (4k-3)$ 。

$R(-1) = 10$ を使って k を求める。

$$R(-1) = k - (5-4k) + (4k-3) = 9k-8 = 10 \implies k = 2$$

したがって $R(x) = 2x^2 + (5-8)x + (8-3) = 2x^2 - 3x + 5$ 。

$$a = 2, b = -3, c = 5$$

三次方程式 $x^3 - 7x + 6 = 0$ の解のうち、最大の解と最小の解の積を求めよ。
(因数定理と組立除法を使うこと)

積 -6

$P(x) = x^3 - 7x + 6$ とする。 $P(1) = 1 - 7 + 6 = 0$ より $x - 1$ が因数。
組立除法 (係数 $1, 0, -7, 6$ 、 $a = 1$) で商は $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$ 。

よって $(x - 1)(x + 3)(x - 2) = 0$ より解は $x = 1, -3, 2$ 。
最大の解は 2 、最小の解は -3 。

積は $2 \times (-3) = -6$