

解と係数の関係

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～7）

1

係数から直接

$x^2 - 5x + 6 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 $\alpha + \beta$ 、 $\alpha\beta$ を求めよ。

$$\alpha + \beta = \underline{5} \quad \alpha\beta = \underline{6}$$

$$a = 1, b = -5, c = 6 \text{ より } \alpha + \beta = -\frac{-5}{1} = 5, \alpha\beta = \frac{6}{1} = 6$$

$$\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 6$$

2

aが1でない

$2x^2 - 7x + 3 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 $\alpha + \beta$ 、 $\alpha\beta$ を求めよ。

$$\alpha + \beta = \underline{7/2} \quad \alpha\beta = \underline{3/2}$$

$$a = 2, b = -7, c = 3 \text{ より } \alpha + \beta = -\frac{-7}{2} = \frac{7}{2}, \alpha\beta = \frac{3}{2}$$

$$\alpha + \beta = \frac{7}{2}, \alpha\beta = \frac{3}{2}$$

3

負の項をふくむ

$x^2 + 4x - 1 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 $\alpha + \beta$ 、 $\alpha\beta$ を求めよ。

$$\alpha + \beta = \underline{-4} \quad \alpha\beta = \underline{-1}$$

$$a = 1, b = 4, c = -1 \text{ より } \alpha + \beta = -\frac{4}{1} = -4, \alpha\beta = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\alpha + \beta = -4, \alpha\beta = -1$$

4

aが1でない・負の項

$3x^2 + x - 2 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 $\alpha + \beta$ 、 $\alpha\beta$ を求めよ。

$$\alpha + \beta = \underline{-1/3} \quad \alpha\beta = \underline{-2/3}$$

$$a = 3, b = 1, c = -2 \text{ より } \alpha + \beta = -\frac{1}{3}, \alpha\beta = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{1}{3}, \alpha\beta = -\frac{2}{3}$$

5

D<0でも成り立つ

$x^2 - x + 3 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 $\alpha + \beta$ 、 $\alpha\beta$ を求めよ。

$$\alpha + \beta = \underline{1} \quad \alpha\beta = \underline{3}$$

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 1 - 12 = -11 < 0$ なので虚数解だが、解と係数の関係は関係なく使える。

$$a = 1, b = -1, c = 3 \text{ より } \alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 3$$

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 3$$

6

 $\alpha^2 + \beta^2$ の基本

$\alpha + \beta = 4$ 、 $\alpha\beta = 7$ のとき、 $\alpha^2 + \beta^2$ の値を求めよ。

$$\alpha^2 + \beta^2 = \underline{2}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4^2 - 2 \cdot 7 = 16 - 14 = 2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2$$

7

 $1/\alpha + 1/\beta$ の基本

$\alpha + \beta = -2$ 、 $\alpha\beta = 3$ のとき、 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ の値を求めよ。

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \underline{-2/3}$$

$$\text{通分すると } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -\frac{2}{3}$$

標準 (8~14) ※どの公式を使うか自分で判定

8 $x^2 - 4x + 2 = 0$ の2つの解を α 、 β とするとき、 $\alpha^2 + \beta^2$ の値を求めよ。

$$\alpha^2 + \beta^2 = \underline{12}$$

$$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 16 - 4 = 12$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 12$$

9 $x^2 + 2x - 4 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 $\alpha^3 + \beta^3$ の値を求めよ。

$$\alpha^3 + \beta^3 = \underline{-32}$$

$$\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = -4$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = (-2)^3 - 3 \cdot (-4) \cdot (-2) = -8 - 24 = -32$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = -32$$

10 $x^2 - 3x + 1 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 $(\alpha - \beta)^2$ の値を求めよ。

$$(\alpha - \beta)^2 = \underline{5}$$

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 1$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 9 - 4 = 5$$

$$(\alpha - \beta)^2 = 5$$

11

2数から方程式を作る

4 と -3 を解とする2次方程式を、 $x^2 + ax + b = 0$ の形で求めよ。

$$a = \underline{-1} \quad b = \underline{-12}$$

$$\text{和 } p = 4 + (-3) = 1, \text{ 積 } q = 4 \times (-3) = -12$$

$$x^2 - px + q = 0 \text{ に代入すると } x^2 - x - 12 = 0$$

$$a = -1, b = -12$$

12

和と積から方程式を作る

$\alpha + \beta = 5$ 、 $\alpha\beta = -6$ であるとき、 α 、 β を解とする2次方程式を $x^2 + ax + b = 0$ の形で求めよ。

$$a = \underline{-5} \quad b = \underline{-6}$$

$$x^2 - px + q = 0 \text{ に } p = 5, q = -6 \text{ を代入すると } x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$a = -5, b = -6$$

13

$x^2 + 5x + 8 = 0$ の2つの解を α 、 β とするとき、 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ の値を求めよ。

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \underline{-5/8}$$

$$\alpha + \beta = -5, \alpha\beta = 8$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-5}{8} = -\frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -\frac{5}{8}$$

14

 $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ の変形

$x^2 - 2x + 4 = 0$ の2つの解を α 、 β とするとき、 $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ の値を求めよ。

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \underline{8}$$

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) \text{ と因数分解できる。}$$

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 4 \text{ なので } \alpha\beta(\alpha + \beta) = 4 \times 2 = 8$$

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 8$$

挑戦 (15~18)

15

解を平行移動した方程式

$x^2 - 4x + 6 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 $\alpha + 1, \beta + 1$ を解とする2次方程式を $x^2 + ax + b = 0$ の形で求めよ。

$$a = \underline{-6} \quad b = \underline{11}$$

$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 6$ 。新しい解の和・積を計算する。

$$\text{和: } (\alpha + 1) + (\beta + 1) = \alpha + \beta + 2 = 4 + 2 = 6$$

$$\text{積: } (\alpha + 1)(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = 6 + 4 + 1 = 11$$

新しい方程式は $x^2 - 6x + 11 = 0$

$$a = -6, b = 11$$

16

解の逆数を解とする方程式

$x^2 - 3x + 6 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ を解とする2次方程式を $x^2 + ax + b = 0$ の形で求めよ。

$$a = \underline{-1/2} \quad b = \underline{1/6}$$

$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 6$ 。新しい解の和・積を計算する。

$$\text{和: } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{積: } \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{6}$$

新しい方程式は $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6} = 0$

$$a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{6}$$

17

係数が分数になる対称式

$2x^2 - 3x + 4 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 $\alpha^3 + \beta^3$ の値を求めよ。

$$\alpha^3 + \beta^3 = \underline{-45/8}$$

$$a = 2, b = -3, c = 4 \text{ より } \alpha + \beta = \frac{3}{2}, \alpha\beta = 2$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{8} - 9 = \frac{27}{8} - \frac{72}{8} = -\frac{45}{8}$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = -\frac{45}{8}$$

18

 $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ の変形

$x^2 + 3x + 5 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ の値を求めよ。

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \underline{4}$$

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\beta = \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\} + \alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta \text{ と変形できる。}$$

$$\alpha + \beta = -3, \alpha\beta = 5 \text{ なので}$$

$$(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta = 9 - 5 = 4$$

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 4$$

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。解の条件から係数の範囲を求める問題など、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

解の条件（2解ともに正）から係数の範囲

$x^2 - 2kx + (k + 2) = 0$ が異なる2つの正の実数解をもつとき、定数 k の値の範囲を求めよ。 $(k > \text{〃})$ の形で境界の値を入力)

$k > \underline{2}$

「異なる2つの正の実数解」なので、次の3条件をすべて満たす必要がある。

【条件1：判別式】 $D = (-2k)^2 - 4(k + 2) = 4k^2 - 4k - 8 = 4(k - 2)(k + 1)$
異なる2つの実数解をもつので $D > 0$ 。よって $(k - 2)(k + 1) > 0$ 、すなわち $k < -1$ または $k > 2$

【条件2：2解の和が正】 解と係数の関係より和 $= 2k$ 。2解ともに正なら和も正なので $2k > 0$ 、すなわち $k > 0$

【条件3：2解の積が正】 解と係数の関係より積 $= k + 2$ 。2解ともに正なら積も正なので $k + 2 > 0$ 、すなわち $k > -2$

3つの条件をすべて満たす範囲を数直線上で重ねる。条件2 ($k > 0$) の中では条件1の「 $k < -1$ 」は成り立たないので、条件1は実質「 $k > 2$ 」だけが残る。条件3 ($k > -2$) は $k > 2$ の中でつねに満たされている。

$k > 2$

応2

対称式の応用

$x^2 - 4x + 2 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 $(\alpha + 1)^2 + (\beta + 1)^2$ の値を求めよ。

$$(\alpha + 1)^2 + (\beta + 1)^2 = \underline{22}$$

まず展開して $\alpha + \beta, \alpha\beta$ の式に直す。

$$(\alpha + 1)^2 + (\beta + 1)^2 = (\alpha^2 + 2\alpha + 1) + (\beta^2 + 2\beta + 1) = (\alpha^2 + \beta^2) + 2(\alpha + \beta) + 2$$

$$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 2 \text{ より } \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 16 - 4 = 12$$

$$\text{代入すると } 12 + 2 \times 4 + 2 = 12 + 8 + 2 = 22$$

$$(\alpha + 1)^2 + (\beta + 1)^2 = 22$$

応3

解の差の条件からkを求める (2つ答えあり)

2次方程式 $x^2 - (k + 1)x + k = 0$ の2つの解の差が **3** であるとき、定数 k の値を求めよ。(2つある場合はコンマ区切りで入力)

$$k = \underline{4, -2}$$

解と係数の関係より、和 $\alpha + \beta = k + 1$ 、積 $\alpha\beta = k$ 。

2解の差 $\alpha - \beta$ は $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ で求められる。

$$(\alpha - \beta)^2 = (k + 1)^2 - 4k = k^2 + 2k + 1 - 4k = k^2 - 2k + 1 = (k - 1)^2$$

差が **3** なので $(\alpha - \beta)^2 = 3^2 = 9$ 。よって $(k - 1)^2 = 9$ 、 $k - 1 = \pm 3$ 、 $k = 4$ または $k = -2$

検算： $k = 4$ のとき $x^2 - 5x + 4 = 0$ (解 1, 4、差 3)。 $k = -2$ のとき $x^2 + x - 2 = 0$ (解 1, -2、差 3)。どちらも成立。

$$k = 4 \text{ または } k = -2$$

応4

解を2乗した数を解とする方程式

$x^2 - 2x - 2 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 α^2, β^2 を解とする2次方程式を $x^2 + ax + b = 0$ の形で求めよ。

$$a = \underline{-8} \quad b = \underline{4}$$

$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -2$ 。新しい解 α^2, β^2 の和・積を計算する。

$$\text{和} : \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4 - 2 \times (-2) = 4 + 4 = 8$$

$$\text{積} : \alpha^2 \times \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = (-2)^2 = 4$$

$$\text{新しい方程式は } x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$a = -8, b = 4$$

応5

虚数解と絶対値（複素数の単元らしい応用）

$x^2 - 4x + 13 = 0$ の2つの解を α, β （互いに共役な複素数）とするとき、 $\alpha\bar{\alpha}$ （ α の絶対値の2乗）の値を求めよ。ただし $\bar{\alpha}$ は α と共役な複素数を表す。

$$\alpha\bar{\alpha} = \underline{13}$$

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 16 - 52 = -36 < 0$ なので α, β は互いに共役な虚数解であり、 $\beta = \bar{\alpha}$ が成り立つ。

したがって $\alpha\bar{\alpha} = \alpha\beta$ であり、これは解と係数の関係の積そのもの。

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{13}{1} = 13$$

（検算：実際に解くと $x = 2 \pm 3i$ なので $\alpha\bar{\alpha} = (2 + 3i)(2 - 3i) = 4 + 9 = 13$ で一致する）

$$\alpha\bar{\alpha} = 13$$