

複素数の計算

解答（全25問）

氏名 _____

得点 _____ / 25点

DRILL

練習問題（全20問）

基本（1～8）

1

加法

$(2 + 3i) + (4 - 5i)$ を計算し、 $a + bi$ の形で表せ。

a+biの形で a= 6 b= -2

実部： $2 + 4 = 6$ 、虚部： $3 + (-5) = -2$

$6 - 2i$

2

減法

$(5 - i) - (3 + 4i)$ を計算し、 $a + bi$ の形で表せ。

a+biの形で a= 2 b= -5

実部： $5 - 3 = 2$ 、虚部： $-1 - 4 = -5$

$2 - 5i$

3

乗法（分配法則）

$(2 + i)(3 - i)$ を計算し、 $a + bi$ の形で表せ。

$a+bi$ の形で $a=$ 7 $b=$ 1

$$(2 + i)(3 - i) = 6 - 2i + 3i - i^2 = 6 + i + 1 = 7 + i$$

$$7 + i$$

4

共役の積（結果は実数）

$(1 - 2i)(1 + 2i)$ を計算し、 $a + bi$ の形で表せ。

$a+bi$ の形で $a=$ 5 $b=$ 0

共役どうしの積は $a^2 + b^2$ の形になる。

$$(1 - 2i)(1 + 2i) = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

$$5 + 0i$$

5

 i の累乗（小さい数）

i^5 を $a + bi$ の形で表せ。

$a+bi$ の形で $a=$ 0 $b=$ 1

$$5 \div 4 = 1 \text{ 余り } 1 \rightarrow i^5 = i^1 = i$$

$$0 + i$$

6

iの累乗（4で割る）

i^{10} を $a + bi$ の形で表せ。

a+biの形で a= -1 b= 0

$$10 \div 4 = 2 \text{ 余り } 2 \rightarrow i^{10} = i^2 = -1$$

$$-1 + 0i$$

7

負の数の平方根

$\sqrt{-9}$ を $a + bi$ の形で表せ。

a+biの形で a= 0 b= 3

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9}i = 3i$$

$$0 + 3i$$

8

複素数の相等

実数 x, y が $(x - 2) + (y + 1)i = 3 - 4i$ を満たすとき、 x, y の値を求めよ。

x= 5 y= -5

$$\text{実部: } x - 2 = 3 \rightarrow x = 5$$

$$\text{虚部: } y + 1 = -4 \rightarrow y = -5$$

$$x = 5, y = -5$$

- 9 $(3 + 2i)(1 - i)$ を計算し、 $a + bi$ の形で表せ。

$a+bi$ の形で $a=$ 5 $b=$ -1

$$(3 + 2i)(1 - i) = 3 - 3i + 2i - 2i^2 = 3 - i + 2 = 5 - i$$

$$5 - i$$

- 10 $\frac{4 - i}{1 + i}$ を計算し、 $a + bi$ の形で表せ。

$a+bi$ の形で $a=$ 3/2 $b=$ -5/2

分母 $1 + i$ の共役 $1 - i$ を分母・分子にかける。

$$\text{分子: } (4 - i)(1 - i) = 4 - 4i - i + i^2 = 4 - 5i - 1 = 3 - 5i$$

$$\text{分母: } (1 + i)(1 - i) = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$\frac{3 - 5i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$$

$$\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$$

- 11 $\frac{2 + 3i}{i}$ を計算し、 $a + bi$ の形で表せ。

$a+bi$ の形で $a=$ 3 $b=$ -2

分母 i の共役 $-i$ を分母・分子にかける ($i \times (-i) = -i^2 = 1$ で分母が実数化される)。

$$\text{分子: } (2 + 3i)(-i) = -2i - 3i^2 = -2i + 3 = 3 - 2i$$

$$\text{分母: } 1$$

$$3 - 2i$$

12 i^{37} を $a + bi$ の形で表せ。

$a+bi$ の形で $a=$ 0 $b=$ 1

$$37 \div 4 = 9 \text{ 余り } 1 \rightarrow i^{37} = i^1 = i$$

$$0 + i$$

13 i^{100} を $a + bi$ の形で表せ。

$a+bi$ の形で $a=$ 1 $b=$ 0

$$100 \div 4 = 25 \text{ 余り } 0 \rightarrow i^{100} = i^0 = 1$$

$$1 + 0i$$

14

根号の中が両方負の罫に注意

$\sqrt{-4} \times \sqrt{-25}$ を計算し、 $a + bi$ の形で表せ。

$a+bi$ の形で $a=$ -10 $b=$ 0

根号の中が両方とも負なので、先にそれぞれ $a + bi$ の形に直す。

$$\sqrt{-4} = 2i, \sqrt{-25} = 5i$$

$$\sqrt{-4} \times \sqrt{-25} = 2i \times 5i = 10i^2 = -10$$

(もし $\sqrt{(-4)(-25)} = \sqrt{100} = 10$ としてしまうと符号を間違える)

$$-10 + 0i$$

15 $\sqrt{-8}$ を $a + bi$ の形で表せ。

$a+bi$ の形で $a=$ 0 $b=$ $2\sqrt{2}$

$$\sqrt{-8} = \sqrt{8}i = \sqrt{4 \times 2}i = 2\sqrt{2}i$$

$$0 + 2\sqrt{2}i$$

- 16 実数 x, y が $(2x + y) + (x - y)i = 7 + 2i$ を満たすとき、 x, y の値を求めよ。

$$x = \underline{3} \quad y = \underline{1}$$

相等より実部・虚部それぞれで方程式を作る。

$$2x + y = 7 \cdots (1)$$

$$x - y = 2 \cdots (2)$$

$$(1) + (2) : 3x = 9 \rightarrow x = 3. (2) \text{に代入} : 3 - y = 2 \rightarrow y = 1$$

$$x = 3, y = 1$$

挑戦 (17~20)

17

共役の平方どうしの積

$(1 + i)^2(1 - i)^2$ を計算し、 $a + bi$ の形で表せ。

$$a+bi\text{の形で } a = \underline{4} \quad b = \underline{0}$$

先にそれぞれの2乗を計算する。

$$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$$

$$(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$$

$$(1 + i)^2(1 - i)^2 = 2i \times (-2i) = -4i^2 = 4$$

$$4 + 0i$$

18

3乗の展開

$(2 - i)^3$ を計算し、 $a + bi$ の形で表せ。

$a+bi$ の形で $a=$ 2 $b=$ -11

まず $(2 - i)^2$ を計算してから $(2 - i)$ をもう一度かける。

$$(2 - i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i$$

$$(2 - i)^3 = (3 - 4i)(2 - i) = 6 - 3i - 8i + 4i^2 = 6 - 11i - 4 = 2 - 11i$$

$$2 - 11i$$

19

iの累乗（大きい数）

i^{123} を $a + bi$ の形で表せ。

$a+bi$ の形で $a=$ 0 $b=$ -1

$$123 \div 4 = 30 \text{ 余り } 3 \rightarrow i^{123} = i^3 = -i$$

$$0 - i$$

20

$\frac{1 + 2i}{2 - i} - \frac{1 - 2i}{2 + i}$ を計算し、 $a + bi$ の形で表せ。

$a+bi$ の形で $a=$ 0 $b=$ 2

それぞれ分母の共役を分母・分子にかけて実数化する。

$$\frac{1 + 2i}{2 - i} = \frac{(1 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 + i + 4i + 2i^2}{4 + 1} = \frac{5i}{5} = i$$

$$\frac{1 - 2i}{2 + i} = \frac{(1 - 2i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{2 - i - 4i + 2i^2}{4 + 1} = \frac{-5i}{5} = -i$$

$$\text{差: } i - (-i) = 2i$$

$$0 + 2i$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

複素数の値の計算

$x = 1 + i$ のとき、 $x^2 - 2x + 3$ の値を求めよ。

値 1

$x^2 - 2x + 3 = (x^2 - 2x + 1) + 2 = (x - 1)^2 + 2$ と変形すると、 $x - 1$ の形が
使えて計算が速い。

$$x - 1 = (1 + i) - 1 = i$$

$$(x - 1)^2 = i^2 = -1$$

$$x^2 - 2x + 3 = -1 + 2 = 1$$

1

応2

i の累乗（大きい指数）

i^{2026} を $a + bi$ の形で表せ。

$a+bi$ の形で $a=$ -1 $b=$ 0

$2026 \div 4$ を計算する。 $4 \times 506 = 2024$ なので $2026 = 4 \times 506 + 2$ 、余りは 2。

$$i^{2026} = i^2 = -1$$

$-1 + 0i$

応3

相等条件から係数決定

実数 a, b が $(a + bi)(2 - i) = 4 + 3i$ を満たすとき、 a, b の値を求めよ。

$a = \underline{1} \quad b = \underline{2}$

左辺を展開して $a + bi$ の形に整理する。

$$(a + bi)(2 - i) = 2a - ai + 2bi - bi^2 = 2a - ai + 2bi + b = (2a + b) + (2b - a)i$$

右辺 $4 + 3i$ と相等より

実部： $2a + b = 4 \cdots (1)$

虚部： $-a + 2b = 3 \cdots (2)$

(1)より $b = 4 - 2a$ 。(2)に代入： $-a + 2(4 - 2a) = 3 \rightarrow -a + 8 - 4a = 3 \rightarrow -5a = -5 \rightarrow a = 1$

このとき $b = 4 - 2 = 2$

検算： $(1 + 2i)(2 - i) = 2 - i + 4i - 2i^2 = 2 + 3i + 2 = 4 + 3i \quad \bigcirc$

$a = 1, b = 2$

応4

i の周期性を利用した和

$i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{40}$ の値を求めよ。

値 $\underline{0}$

連続する4個の和は必ず打ち消し合って 0 になることを利用する。

$$i^1 + i^2 + i^3 + i^4 = i + (-1) + (-i) + 1 = 0$$

i から i^{40} までは 40 個の項があり、 $40 \div 4 = 10$ なので「4個で0になる組」がちょうど 10 組ぶん、余りなく並んでいる。

0

2次方程式 $x^2 - 2x + 5 = 0$ を解け。(解の公式を用いよ。コンマ区切りで入力)

x= 1+2i,1-2i

解の公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ に $a = 1$, $b = -2$, $c = 5$ を代入する。

判別式: $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16$ (負の数)

判別式が負なので、根号の中を $a + bi$ の形に直す。

$$\sqrt{-16} = \sqrt{16}i = 4i$$

$$x = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

$$x = 1 + 2i, 1 - 2i$$