

複素数と方程式 まとめ

解答（全27問）

氏名 _____

得点 _____ / 27点

DRILL

まとめテスト（標準）

基本（1～15）

1

複素数の減法

$(4 - 3i) - (1 - 5i)$ を計算し、 $a + bi$ の形で表せ。

$a+bi$ の形で $a=$ 3 $b=$ 2

実部どうし・虚部どうしをそれぞれ計算する。

実部： $4 - 1 = 3$ 、虚部： $-3 - (-5) = 2$

$3 + 2i$

2

複素数の乗法

$(3 + i)(2 - 3i)$ を計算し、 $a + bi$ の形で表せ。

$a+bi$ の形で $a=$ 9 $b=$ -7

分配法則で展開し、 $i^2 = -1$ で整理する。

$$(3 + i)(2 - 3i) = 6 - 9i + 2i - 3i^2 = 6 - 7i + 3 = 9 - 7i$$

$$9 - 7i$$

3

複素数の除法

$\frac{5 + i}{2 - i}$ を計算し、 $a + bi$ の形で表せ。

$a+bi$ の形で $a=$ 9/5 $b=$ 7/5

分母 $2 - i$ の共役 $2 + i$ を分母・分子にかける。

$$\text{分子：}(5 + i)(2 + i) = 10 + 5i + 2i + i^2 = 10 + 7i - 1 = 9 + 7i$$

$$\text{分母：}(2 - i)(2 + i) = 2^2 + 1^2 = 5$$

$$\frac{9 + 7i}{5} = \frac{9}{5} + \frac{7}{5}i$$

$$\frac{9}{5} + \frac{7}{5}i$$

4

 i の累乗

i^{34} を $a + bi$ の形で表せ。

$a+bi$ の形で $a=$ -1 $b=$ 0

$$34 \div 4 = 8 \text{ 余り } 2 \rightarrow i^{34} = i^2 = -1$$

$$-1 + 0i$$

5

根号の中が両方負の罫

$\sqrt{-7} \times \sqrt{-28}$ を計算せよ。

値 -14

根号の中が両方とも負なので、先にそれぞれ $a + bi$ の形に直す。

$$\sqrt{-7} = \sqrt{7}i, \quad \sqrt{-28} = \sqrt{28}i$$

$$\sqrt{-7} \times \sqrt{-28} = \sqrt{7}i \times \sqrt{28}i = \sqrt{7 \times 28}i^2 = \sqrt{196} \times (-1) = 14 \times (-1) = -14$$

-14

6

複素数の相等

実数 x, y が $(3x - 2) + (y + 4)i = 7 - i$ を満たすとき、 x, y の値を求めよ。

x= 3 y= -5

相等より実部どうし・虚部どうしがそれぞれ等しい。

$$\text{実部: } 3x - 2 = 7 \rightarrow 3x = 9 \rightarrow x = 3$$

$$\text{虚部: } y + 4 = -1 \rightarrow y = -5$$

$$x = 3, y = -5$$

7

判別式と虚数解

$x^2 - 6x + 13 = 0$ を解け。(コンマ区切りで入力)

x= 3+2i,3-2i

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 36 - 52 = -16. \quad D < 0 \text{ なので虚数解。}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2}$$

$$x = 3 + 2i, 3 - 2i$$

8

解と係数の関係 (基本)

$2x^2 + 3x - 4 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 $\alpha + \beta$ 、 $\alpha\beta$ を求めよ。

$$\alpha + \beta = \underline{-3/2} \quad \alpha\beta = \underline{-2}$$

$$a = 2, b = 3, c = -4 \text{より}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{3}{2}, \alpha\beta = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\alpha + \beta = -\frac{3}{2}, \alpha\beta = -2$$

9

対称式 (2乗の和)

$\alpha + \beta = -2$ 、 $\alpha\beta = -5$ のとき、 $\alpha^2 + \beta^2$ の値を求めよ。

$$\alpha^2 + \beta^2 = \underline{14}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2)^2 - 2 \times (-5) = 4 + 10 = 14$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 14$$

10

和と積から方程式を作る

和が -3 、積が -10 である2数を解とする2次方程式を、 $x^2 + ax + b = 0$ の形で求めよ。

$$a = \underline{3} \quad b = \underline{-10}$$

$$x^2 - px + q = 0 \text{に} p = -3, q = -10 \text{を代入すると}$$

$$x^2 - (-3)x + (-10) = 0 \text{ すなわち } x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$a = 3, b = -10$$

11

剰余の定理

$P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 4$ を $x - 1$ で割った余りを求めよ。

余り 6

剰余の定理より、余りは $P(1)$ 。

$$P(1) = 1 + 2 - 1 + 4 = 6$$

余りは6

12

因数定理の確認

$P(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ が $x - 1$ を因数にもつかどうかを、 $P(1)$ の値を計算して確かめよ。

$P(1) =$ 0

$$P(1) = 1 + 1 - 10 + 8 = 0$$

$P(1) = 0$ なので、因数定理より $x - 1$ は $P(x)$ の因数である

13

組立除法

$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ を組立除法を用いて $x - 1$ で割り、商と余りを求めよ。(商は $x^2 + cx + d$ の形で表せ)

商のxの係数 $c =$ -1 商の定数項 $d =$ -6 余り = 0

$a = 1$ 、係数は1, -2, -5, 6。

最初の1をそのまま降ろす。 $1 \times 1 = 1$ を次の係数-2に足して-1。 $-1 \times 1 = -1$ を次の係数-5に足して-6。 $-6 \times 1 = -6$ を最後の係数6に足して0。

下段の1, -1, -6が商の係数 ($x^2 - x - 6$)、最後の0が余り。

商は $x^2 - x - 6$ 、余りは0

14

高次方程式（モニック・整数解）

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ を解け。（小さい順にコンマ区切りで入力）

解 $x =$ -2,-1,1

定数項 -2 の約数 $\pm 1, \pm 2$ を調べる。 $P(1) = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$ より $x = 1$ が解。
組立除法で $x - 1$ で割ると商は $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$ 。

$$x = -2, -1, 1$$

15

高次方程式（虚数解を含む）

$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$ を解け。実数解のみ入力せよ（虚数解は解説で確認）。

実数解 $x =$ 2

定数項 -8 の約数を調べる。 $P(2) = 8 - 8 + 8 - 8 = 0$ より $x = 2$ が解。
組立除法で $x - 2$ で割ると商は $x^2 + 4$ 。 $x^2 + 4 = 0$ より $x^2 = -4$ 、よって $x = \pm 2i$

$$x = 2, \pm 2i \text{（実数解は2のみ、残り2つは虚数解）}$$

16

除法と相等の融合

複素数 $z = a + bi$ (a, b は実数) が $(2 + i)z = 4 + 7i$ を満たすとき、 a, b の値を求めよ。

$$a = \underline{3} \quad b = \underline{2}$$

$z = \frac{4 + 7i}{2 + i}$ 。分母の共役 $2 - i$ を分母・分子にかける。

$$\text{分子: } (4 + 7i)(2 - i) = 8 - 4i + 14i - 7i^2 = 8 + 10i + 7 = 15 + 10i$$

$$\text{分母: } (2 + i)(2 - i) = 2^2 + 1^2 = 5$$

$$z = \frac{15 + 10i}{5} = 3 + 2i$$

$$a = 3, b = 2$$

17

共役な虚数解と解と係数の関係の融合

$x^2 - 2x + 10 = 0$ の2つの解を α, β (互いに共役な複素数) とする。 $\alpha + \beta$ 、 $\alpha\beta$ 、 $\alpha^2 + \beta^2$ の値を求めよ。

$$\alpha + \beta = \underline{2} \quad \alpha\beta = \underline{10} \quad \alpha^2 + \beta^2 = \underline{-16}$$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 4 - 40 = -36 < 0$ なので α, β は互いに共役な虚数解。
実数解でなくても解と係数の関係は使える。

$$a = 1, b = -2, c = 10 \text{ より } \alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 10$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 2^2 - 2 \times 10 = 4 - 20 = -16$$

($\beta = \bar{\alpha}$ なので $\alpha\beta = \alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2 = 10$ になっていることにも注目しておこう)

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 10, \alpha^2 + \beta^2 = -16$$

整式 $P(x)$ を $x - 2$ で割ると余りが 5 、 $x + 3$ で割ると余りが -15 となる。
 $P(x)$ を $(x - 2)(x + 3)$ で割った余りを $ax + b$ の形で求めよ。

$$a = \underline{4} \quad b = \underline{-3}$$

割る式 $(x - 2)(x + 3)$ は2次式なので余りは高々1次式。商を $Q(x)$ とすると

$$P(x) = (x - 2)(x + 3)Q(x) + ax + b$$

$x = 2$ を代入： $(x - 2)$ の部分が 0 になり $P(2) = 2a + b$ 。よって $2a + b = 5$ 。

$x = -3$ を代入： $P(-3) = -3a + b$ 。よって $-3a + b = -15$ 。

連立方程式 $2a + b = 5$, $-3a + b = -15$ を解く。上の式から下の式を引くと $5a = 20$ より $a = 4$ 。 $2a + b = 5$ に代入して $b = 5 - 8 = -3$ 。

余りは $4x - 3$ ($a = 4$, $b = -3$)

3次方程式 $x^3 + ax^2 - 14x + b = 0$ が $x = 1$ と $x = -2$ を解にもつとき、定数 a, b の値と、残りの解を求めよ。

$a = \underline{-11}$ $b = \underline{24}$ 残りの解 $x = \underline{12}$

$x = 1$ を代入： $1 + a - 14 + b = 0$ より $a + b = 13 \cdots (1)$

$x = -2$ を代入： $-8 + 4a + 28 + b = 0$ より $4a + b = -20 \cdots (2)$

$(2)-(1) : 3a = -33$ より $a = -11$ 。 (1) に代入して $b = 13 - (-11) = 24$ 。

方程式は $x^3 - 11x^2 - 14x + 24 = 0$ 。3次方程式の解と係数の関係より、3つの解の和は $-\frac{-11}{1} = 11$ 。

既に分かっている解の和は $1 + (-2) = -1$ なので、残りの解は $11 - (-1) = 12$ 。

検算： $12^3 - 11 \cdot 12^2 - 14 \cdot 12 + 24 = 1728 - 1584 - 168 + 24 = 0$ ○

$a = -11, b = 24$ 、残りの解 $x = 12$

3次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + 20 = 0$ (a, b は実数の定数) の解の1つが $2 + i$ であり、他の解の1つが実数であるとき、実数解と a, b の値を求めよ。

実数解 $x = \underline{-4}$ $a = \underline{0}$ $b = \underline{-11}$

係数がすべて実数なので、共役複素数 $2 - i$ も解。実数解を r とすると、3つの解は $2 + i, 2 - i, r$ 。

3次方程式の解と係数の関係を使う。

積： $(2 + i)(2 - i) \cdot r = -\frac{20}{1} = -20$ 。 $(2 + i)(2 - i) = 2^2 + 1^2 = 5$ なので
 $5r = -20, r = -4$ 。

和： $(2 + i) + (2 - i) + r = 4 + r = 4 - 4 = 0 = -a$ より $a = 0$ 。

積の和： $(2 + i)(2 - i) + (2 + i)r + (2 - i)r = 5 + r\{(2 + i) + (2 - i)\} =$
 $5 + r \times 4 = 5 + (-4) \times 4 = 5 - 16 = -11 = b$ 。

検算： $x = -4$ を $x^3 - 11x + 20 = 0$ に代入すると $-64 + 44 + 20 = 0$ ○

実数解 $x = -4, a = 0, b = -11$

整式 $P(x)$ を $x^2 + x + 1$ で割った余りが $2x + 3$ であるという。 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ ($x^3 = 1$ の虚数解の1つ) とするとき、 $P(\omega)$ の値を $a + bi$ の形で表せ。

a+biの形で a= 2 b= $\sqrt{3}$

商を $Q(x)$ とすると $P(x) = (x^2 + x + 1)Q(x) + 2x + 3$ 。

ω は $x^3 = 1$ の虚数解なので $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 、つまり ω は $x^2 + x + 1 = 0$ の解。よって $x = \omega$ を代入すると右辺第1項が0になる。

$$P(\omega) = 2\omega + 3$$

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ なので } 2\omega = -1 + \sqrt{3}i。$$

$$P(\omega) = (-1 + \sqrt{3}i) + 3 = 2 + \sqrt{3}i$$

$$P(\omega) = 2 + \sqrt{3}i$$

1辺の長さが12cmの正方形の厚紙がある。四隅から1辺 x cmの正方形を切り取り、残りを折り曲げてふたのない直方体の容器を作る ($0 < x < 6$)。容器の容積が 128cm^3 になるときの x の値を求めよ。

$$x = \underline{2}$$

底面の1辺は $12 - 2x$ 、高さは x なので、容積 V は

$$V = x(12 - 2x)^2 = x(144 - 48x + 4x^2) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$$

$V = 128$ とおくと

$$4x^3 - 48x^2 + 144x = 128$$

$$\text{両辺を4で割ると } x^3 - 12x^2 + 36x - 32 = 0$$

定数項 -32 の約数を調べる。 $x = 2$ を代入： $8 - 48 + 72 - 32 = 0$ 。よって $x = 2$ が解。

組立除法で $x - 2$ で割ると商は $x^2 - 10x + 16 = (x - 2)(x - 8)$ 。

まとめると $x^3 - 12x^2 + 36x - 32 = (x - 2)^2(x - 8)$ 。よって $x = 2$ (重解) または $x = 8$ 。

条件 $0 < x < 6$ を満たすのは $x = 2$ のみ ($x = 8$ は範囲外なので不適)。

$$\text{検算: } x = 2 \text{ のとき } V = 2 \times (12 - 4)^2 = 2 \times 64 = 128 \quad \bigcirc$$

$$x = 2$$

$x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = 0$ を解け。実数解と、2つの虚数解の積の値を求めよ。

実数解 $x =$ 2 虚数解の積 5

定数項 -10 の約数を調べる。 $P(2) = 8 - 16 + 18 - 10 = 0$ より $x = 2$ が解。

組立除法で $x - 2$ で割ると商は $x^2 - 2x + 5$ 。

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0$ なので虚数解。解の公式より

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

2つの虚数解 $1 + 2i$, $1 - 2i$ は互いに共役なので、積は $x^2 - 2x + 5 = 0$ の解と係数の関係よりそのまま定数項 5 (c/a) に一致する。

検算: $(1 + 2i)(1 - 2i) = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$ ○

実数解 $x = 2$ 、虚数解は $1 \pm 2i$ 、その積は 5

$z = 1 + i$ について、 z^4 の値を求めよ。また、それを利用して z^{12} の値を求めよ。

$z^4 =$ -4 $z^{12} =$ -64

$$z^2 = (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$$

$$z^4 = (z^2)^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4 \text{ (実数になる)}$$

$z^4 = -4$ が実数なので、 $z^{12} = (z^4)^3$ として次数を落とせる。

$$z^{12} = (z^4)^3 = (-4)^3 = -64$$

$$z^4 = -4, z^{12} = -64$$

4次方程式 $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5 = 0$ の解の1つが i であるとき、 i の共役複素数も解であることを利用して、残りの2つの解を求めよ。(コンマ区切りで入力)

残りの解 $x =$ $1+2i, 1-2i$

係数がすべて実数なので、 i の共役複素数 $-i$ も解。この2つを解にもつ2次式は
 $(x - i)(x + i) = x^2 - i^2 = x^2 + 1$

もとの4次式をこの2次式で割る。

$$x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5 \div (x^2 + 1)$$

x^4 を x^2 で割ると商の最初の項は x^2 。 $x^2(x^2 + 1) = x^4 + x^2$ を引くと $-2x^3 + 5x^2 - 2x + 5$ 。

$-2x^3$ を x^2 で割ると商の次の項は $-2x$ 。 $-2x(x^2 + 1) = -2x^3 - 2x$ を引くと $5x^2 + 5$ 。

$5x^2$ を x^2 で割ると商の最後の項は 5 。 $5(x^2 + 1) = 5x^2 + 5$ を引くと 0 。

商は $x^2 - 2x + 5$ 、余りは 0 (割り切れる)。よってもとの方程式は

$$(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 5) = 0$$

$x^2 - 2x + 5 = 0$ を解の公式で解く。 $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16$ 。

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

すべての解は $x = i, -i, 1 + 2i, 1 - 2i$ の4つ (虚数解が $i, -i$ と $1 + 2i, 1 - 2i$ の2組の共役ペアになっている)。

残りの解は $x = 1 + 2i, 1 - 2i$ (すべての解は $x = \pm i, 1 \pm 2i$)

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1 複素数を導入することで、実数の範囲では「解なし」としか言えなかった2次方程式が、必ず解をもつようになる。このことを、判別式 D の3つの場合分けに触れながら説明せよ。

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) の解は、解の公式より $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ ($D = b^2 - 4ac$) と表せる。実数の範囲だけで考えると、根号の中の D の符号によって解の状況がまったく変わってしまう。

$D > 0$ のときは $\sqrt{D}$ がそのまま実数として計算でき、異なる2つの実数解が得られる。 $D = 0$ のときは根号の中が0になるので、ただ1つの実数解（重解）になる。ここまでは実数の範囲で完結する。

問題は $D < 0$ のときである。実数の範囲では負の数の平方根は定義されていないので、「 $\sqrt{D}$ が存在しない」＝「実数解がない」と結論するしかなかった。

ここで複素数、特に $i^2 = -1$ を満たす虚数単位 i を導入すると状況が一変する。 $D < 0$ のときも、 $\sqrt{-A} = \sqrt{A}i$ ($A > 0$) という約束により $\sqrt{D} = \sqrt{|D|}i$ と表せるので、解の公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ がそのままの形で意味をもつようになる。つまり、 D がどんな符号であっても、解の公式に代入するという同じ手順で必ず解が求まる。

このように、複素数を数の範囲として認めることで、判別式の符号で場合分けをしていた「解けるか解けないか」という問題が、「解の形が実数か虚数か」という違いに変わる。2次方程式は、複素数の範囲まで広げて考えれば、係数がどのような実数であっても必ず2つの解（重解のときは1つを2重に数える）をもつ、と言い切れるようになるのである。

複素数（特に $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ の約束）を導入すると、判別式 $D < 0$ のときも解の公式がそのまま使えるようになり、2次方程式は係数の値にかかわらず必ず解をもつと言えるようになる。

記2 3次方程式 $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ を解け。この手順が「因数定理でまず1つの解を見つけること」に大きく依存している理由にも触れながら説明せよ。

3次方程式には、2次方程式の解の公式のような「代入するだけで必ず解が求まる」公式は存在しない（高校の範囲では扱わない）。そこで使えるのが因数定理である。

$P(a) = 0$ となる a を1つでも見つけられれば、 $x - a$ という1次式を因数としてくり出せる。3次式から1次式を取り除けば残りは2次式になり、あとは使い慣れた解の公式で仕上げられる。つまり、3次方程式を解く作業は「最初の1つの解をどう見つけるか」にすべてがかかっている。

実際に $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ で確かめる。最高次の係数が1なので、有理数解の候補は定数項 -6 の約数 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ にかぎられる。順に試すと

$$P(1) = 1 + 4 + 1 - 6 = 0$$

なので $x = 1$ が解であり、因数定理より $x - 1$ は $P(x)$ の因数である。

組立除法で係数1, 4, 1, -6 を $a = 1$ で割る。最初の1をそのまま降ろす。 $1 \times 1 = 1$ を次の係数4に足して5。 $5 \times 1 = 5$ を次の係数1に足して6。 $6 \times 1 = 6$ を最後の係数 -6 に足して0（余り0で割り切れることが確認できる）。

商は $x^2 + 5x + 6$ なので

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x^2 + 5x + 6)$$

残りの2次式は $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ と因数分解できるので、 $x = -2, -3$ も解である。

この例からわかるとおり、「因数定理で1つの解を見つける」というたった1つのステップさえ突破できれば、あとは次数が1つ下がった、すでに解き方を知っている方程式（今回は2次方程式）に帰着できる。逆に言えば、この最初の1つが見つからなければ、3次方程式は手も足も出なくなってしまう。だからこそ、定数項の約数を順に試すという地道な作業が、高次方程式を解くうえで欠かせない出発点になっている。

$x = 1, -2, -3$ 。3次方程式には解の公式がないため、因数定理で1つの解を見つけ、次数を1つ下げ、慣れた2次方程式に帰着させることが唯一の解法の入口になっている。

EXAM

共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 8分/配点 20点

花子さんと太郎さんは、2次方程式 $x^2 - 6x + c = 0$ の解が、定数 c の値によってどう変わるかを、先生と一緒に調べている。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「まずは $c = 13$ のときを考えてみよう。」

- (1) $c = 13$ のとき、 $x^2 - 6x + 13 = 0$ を解け。解は $x = \boxed{\text{ア}} \pm \boxed{\text{イ}}i$ の形になる。

ア 3 イ 2

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 36 - 52 = -16。D < 0 \text{ なので虚数解になる。}$$

解の公式より

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i$$

$$x = 3 \pm 2i$$

- (2) 太郎「解と係数の関係を使えば、実際に解を求めなくても和と積が分かるはずだね。」

先生「そうだね。 $c = 13$ のときの解を α 、 β として、 $\alpha + \beta$ 、 $\alpha\beta$ 、 $\alpha^2 + \beta^2$ を求めてみよう。」

$$\alpha + \beta = \boxed{\text{ウ}}、\alpha\beta = \boxed{\text{エオ}}、\alpha^2 + \beta^2 = \boxed{\text{カキ}} \text{ である。}$$

ウ 6 エオ 13 カキ 10

解と係数の関係より、 $a = 1, b = -6, c = 13$ （この c は問題の定数と同じ値）を使って

$$\alpha + \beta = -\frac{-6}{1} = 6$$

$$\alpha\beta = \frac{13}{1} = 13$$

対称式の変形公式を使う。

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 6^2 - 2 \times 13 = 36 - 26 = 10$$

（検算：(1)の $\alpha = 3 + 2i, \beta = 3 - 2i$ を使うと、 $\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = (3 + 2i)(3 - 2i) = 9 + 4 = 13$ で一致する。）

$$\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = 13, \alpha^2 + \beta^2 = 10$$

- (3) 花子「 c の値を変えると、解が実数になったり虚数になったりするんだよね。実数解をもつための c の条件を求めてみよう。」

$x^2 - 6x + c = 0$ が実数解をもつような c の値の範囲は、 $c \leq \boxed{\text{ク}}$ である。

ク 9

実数解をもつ（重解も含む） $\iff D \geq 0$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 36 - 4c$$

$$36 - 4c \geq 0 \text{ より } 4c \leq 36, \text{ よって } c \leq 9$$

（ $c = 13$ は9より大きいので、(1)で虚数解になったこととつじつまが合う。）

$$c \leq 9$$

大問2 目標時間 8分／配点 20点

ある工場では、1日に x 個の製品を生産したときの利益（単位：千円）が、整式 $P(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ で表されるという。花子さんと太郎さんは、利益がちょうど0円になる生産数について、先生と一緒に考えている。

花子「まず、 $P(1)$ を計算してみよう。」

- (1) 剰余の定理を用いて、 $P(x)$ を $x - 1$ で割った余りを求めよ。余りは $\boxed{\text{ア}}$ であり、これは $x = 1$ が方程式 $P(x) = 0$ の解であることを意味している。

ア 0

剰余の定理より、余りは $P(1)$ 。
 $P(1) = 1 - 9 + 23 - 15 = 0$

余りが0なので、因数定理より $x - 1$ は $P(x)$ の因数である。

余りは0

- (2) 太郎「余りが0ということは、 $x - 1$ が $P(x)$ の因数なんだね。組立除法で商を求めて、残りの解も求めよう。」

組立除法で商を求めると $x^2 + \boxed{\text{イ}}x + \boxed{\text{エオ}}$ となり、 $P(x) = 0$ の解は $x = 1, \boxed{\text{カ}}, \boxed{\text{キ}}$ ($\boxed{\text{カ}} < \boxed{\text{キ}}$) である。

イ -8 エオ 15 カ 3 キ 5

$a = 1$ 、係数は1, -9 , 23 , -15 。

最初の1をそのまま降ろす。 $1 \times 1 = 1$ を次の係数 -9 に足して -8 。 $-8 \times 1 = -8$ を次の係数 23 に足して 15 。 $15 \times 1 = 15$ を最後の係数 -15 に足して0。

商は $x^2 - 8x + 15$ 。これを因数分解すると
 $x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5)$

よって $P(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 5)$ 、解は $x = 1, 3, 5$ 。

商は $x^2 - 8x + 15$ 、解は $x = 1, 3, 5$

- (3) 花子「つまり、生産数が1個、3個、5個のときに利益がちょうど0円になるんだね。3次方程式の解と係数の関係を使うと、3つの解の和と積を、実際に解かなくても求められるはずだよ。」

解と係数の関係を用いると、3つの解の和は $\boxed{\text{ク}}$ 、積は $\boxed{\text{ケコ}}$ である。

ク 9 ケコ 15

$P(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ は $a = 1$, $b = -9$, $c = 23$, $d = -15$ なので、3次方程式の解と係数の関係より

$$\text{和} : -\frac{b}{a} = -\frac{-9}{1} = 9$$

$$\text{積} : -\frac{d}{a} = -\frac{-15}{1} = 15$$

検算：(2)で求めた解1, 3, 5を使うと、和は $1 + 3 + 5 = 9$ 、積は $1 \times 3 \times 5 = 15$ で一致する。解を実際に求めなくても、係数だけからこの値が得られるのが解と係数の関係の便利さである。

和は9、積は15