

面積

解答（全21問）

氏名 _____

得点 _____ / 21点

DRILL

練習問題（全16問）

基本（1～6）

1

曲線とx軸（区間全体で正）

$y = x^2$ のグラフとx軸、および直線 $x = 0$ 、 $x = 3$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

面積 9

区間 $[0, 3]$ で $x^2 \geq 0$ なのでそのまま積分すればよい。

$$S = \int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{27}{3}$$

面積 = 9

2

曲線とx軸（区間全体で正）

$y = -x^2 + 4$ のグラフとx軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

面積 32/3

$-x^2 + 4 = 0$ より $x = \pm 2$ 。この区間で $-x^2 + 4 \geq 0$ なのでそのまま積分。

$$S = \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2 = \frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3} \right) = \frac{32}{3}$$

$$\text{面積} = \frac{32}{3}$$

3

曲線とx軸（区間全体で負・絶対値注意）

$y = x^2 - 4x$ のグラフとx軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

面積 32/3

$x^2 - 4x = 0$ より $x = 0, 4$ 。 $x = 2$ を代入すると $4 - 8 = -4 < 0$ なので、この区間では $f(x) \leq 0$ 。

面積を求めるにはマイナスを付ける。

$$S = - \int_0^4 (x^2 - 4x) dx = - \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right]_0^4 = - \left(\frac{64}{3} - 32 \right) = - \left(-\frac{32}{3} \right) = \frac{32}{3}$$

$$\text{面積} = \frac{32}{3}$$

4

2曲線（放物線と直線）

$y = x^2$ と $y = x + 2$ （STEP 2の例題と同じ2曲線）で囲まれた部分の面積を求めよ。

面積 9/2

STEP 2の例題と同じ計算になる。交点は $x = -1, 2$ 、区間内は直線が上。

$$\text{面積} = \frac{9}{2}$$

5

2曲線（放物線どうし）

$y = -2x^2 + 6x$ と $y = x^2$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

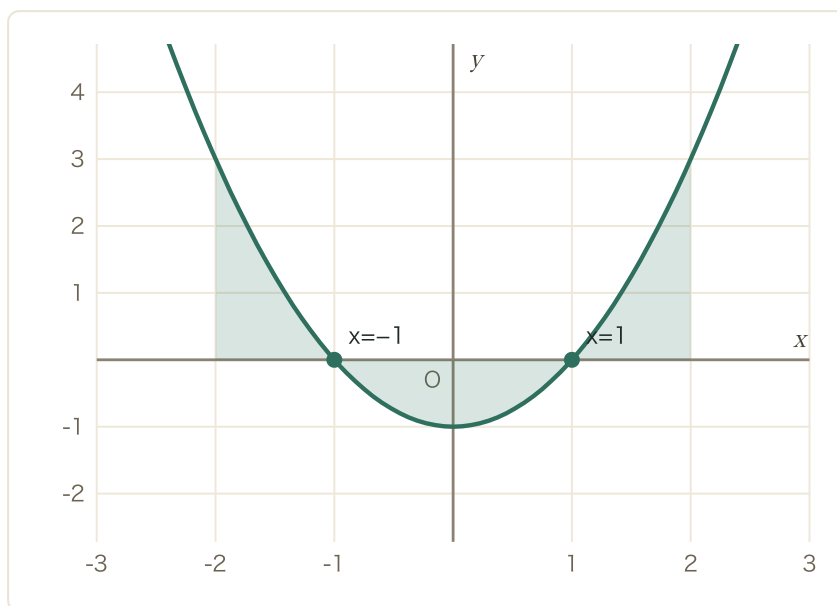
面積 4

交点： $-2x^2 + 6x = x^2$ より $3x^2 - 6x = 0$ 、 $3x(x - 2) = 0$ なので $x = 0, 2$ 。
 $x = 1$ を代入すると $-2x^2 + 6x$ 側は 4、 x^2 側は 1 なので $-2x^2 + 6x$ が上。

$$S = \int_0^2 \{(-2x^2 + 6x) - x^2\} dx = \int_0^2 (-3x^2 + 6x) dx = [-x^3 + 3x^2]_0^2 = -8 + 12$$

$$\text{面積} = 4$$

$y = x^2 - 1$ のグラフとx軸、および直線 $x = -2$ 、 $x = 2$ で囲まれた部分の面積を求めよ。



軸の上下が2回入れ替わる。3つの区間に分けて、それぞれ正負を確かめてから絶対値の和をとろう。

面積 4

$x^2 - 1 = 0$ より $x = \pm 1$ 。区間 $[-2, 2]$ の中に交点が2つあるので、 $[-2, -1]$ 、 $[-1, 1]$ 、 $[1, 2]$ の3つに分割する。

$x = -1.5$ で $1.25 > 0$ 、 $x = 0$ で $-1 < 0$ 、 $x = 1.5$ で $1.25 > 0$ 。

$$\int (x^2 - 1) dx = \frac{x^3}{3} - x$$

$$[-2, -1] : \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) - \left(-\frac{8}{3} + 2 \right) = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3} \text{ (プラスのまま)}$$

$$[-1, 1] : \left(\frac{1}{3} - 1 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3} \text{ (マイナスなので面積は } \frac{4}{3} \text{)}$$

$$[1, 2] : \left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3} \text{ (プラスのまま)}$$

$$\text{面積} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4$$

- 7 $y = x^2 - 2x - 3$ のグラフと x 軸で囲まれた部分の面積を、1/6公式を使って求めよ。

面積 32/3

$x^2 - 2x - 3 = 0$ より $(x - 3)(x + 1) = 0$ 、 $x = -1, 3$ ($\alpha = -1, \beta = 3$)。放物線の x^2 の係数 $a = 1$ 。

$$S = |a| \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} = 1 \times \frac{4^3}{6} = \frac{64}{6}$$

$$\text{面積} = \frac{32}{3}$$

- 8 $y = x^2 - 3x + 2$ と $y = -x + 2$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

面積 4/3

交点: $x^2 - 3x + 2 = -x + 2$ より $x^2 - 2x = 0$ 、 $x = 0, 2$ 。差 (直線-放物線) $= -x^2 + 2x = -(x - 0)(x - 2)$ 、 $a = -1$ 。

$$S = |a| \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} = 1 \times \frac{2^3}{6} = \frac{8}{6}$$

$$\text{面積} = \frac{4}{3}$$

- 9 $y = x^3 - x$ のグラフとx軸、および直線 $x = -1$ 、 $x = 1$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

面積 1/2

$x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ より、区間 $[-1, 1]$ 中の交点は $x = 0$ 。
 $x = -0.5$ で $0.375 > 0$ 、 $x = 0.5$ で $-0.375 < 0$ なので $x = 0$ で分割する。

$$\int (x^3 - x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$

$$[-1, 0] : 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = 0 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \text{ (プラスのまま)}$$

$$[0, 1] : \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - 0 = -\frac{1}{4} \text{ (マイナスなので面積は } \frac{1}{4} \text{)}$$

$$\text{面積} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

- 10 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ のグラフとx軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

面積 16/3

$$\frac{1}{2}x^2 - 2 = 0 \text{ より } x^2 = 4, x = \pm 2. a = \frac{1}{2}.$$

$$S = |a| \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{4^3}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{64}{6} = \frac{32}{6}$$

$$\text{面積} = \frac{16}{3}$$

- 11 $y = -x^2 + 2x + 3$ と $y = x + 1$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

面積 9/2

交点： $-x^2 + 2x + 3 = x + 1$ より $x^2 - x - 2 = 0$ 、 $(x - 2)(x + 1) = 0$ 、 $x = -1, 2$ 。

$x = 0$ を代入すると放物線側 3、直線側 1 なので放物線が上。差 $= -x^2 + x + 2 = -(x + 1)(x - 2)$ 、 $a = -1$ 。

$$S = 1 \times \frac{3^3}{6} = \frac{27}{6}$$

$$\text{面積} = \frac{9}{2}$$

- 12 $y = -x^2 + 6x$ と $y = x^2$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

面積 9

交点： $-x^2 + 6x = x^2$ より $-2x^2 + 6x = 0$ 、 $2x(3 - x) = 0$ 、 $x = 0, 3$ 。

差 $= (-x^2 + 6x) - x^2 = -2x^2 + 6x = -2x(x - 3)$ 、 $a = -2$ 。

$$S = |a| \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} = 2 \times \frac{3^3}{6} = 2 \times \frac{27}{6} = \frac{54}{6}$$

$$\text{面積} = 9$$

- 13 $y = 2x^2 - 8x + 6$ のグラフとx軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

面積 8/3

$2x^2 - 8x + 6 = 0$ より $x^2 - 4x + 3 = 0$ 、 $(x - 1)(x - 3) = 0$ 、 $x = 1, 3$ 。

$a = 2$ (2次の係数はそのまま)。

$$S = |a| \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} = 2 \times \frac{2^3}{6} = 2 \times \frac{8}{6}$$

$$\text{面積} = \frac{8}{3}$$

14

交点が区間の途中にある (分割注意)

$y = x^2 - 2x$ と $y = x$ について、 $0 \leq x \leq 4$ の範囲で2曲線とで囲まれた部分の面積を求めよ (2曲線は $x = 3$ でも交わるので、区間の途中で上下が入れ替わることに注意)。

面積 19/3

交点: $x^2 - 2x = x$ より $x^2 - 3x = 0$ 、 $x = 0, 3$ 。区間 $[0, 4]$ の中に $x = 3$ があるので、ここで分割する。

$x = 1$ では直線が上 ($1 > -1$)、 $x = 3.5$ では放物線が上 ($5.25 > 3.5$)。

$$[0, 3] : \int_0^3 \{x - (x^2 - 2x)\} dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 13.5 - 9 = \frac{9}{2}$$

$$[3, 4] : \int_3^4 \{(x^2 - 2x) - x\} dx = \int_3^4 (x^2 - 3x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_3^4 = \left(-\frac{8}{3} \right) - \left(-\frac{9}{2} \right) = \frac{11}{6}$$

$$\text{面積} = \frac{9}{2} + \frac{11}{6} = \frac{27}{6} + \frac{11}{6} = \frac{38}{6} = \frac{19}{3}$$

$y = x^3 - 4x$ のグラフとx軸、および直線 $x = -1$ 、 $x = 3$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

面積 12

$x^3 - 4x = x(x - 2)(x + 2)$ より、区間 $[-1, 3]$ の中にある交点は $x = 0, 2$ ($x = -2$ は区間の外)。

$x = -0.5$ で $1.875 > 0$ 、 $x = 1$ で $-3 < 0$ 、 $x = 2.5$ で $5.625 > 0$ 。3つに分割する。

$$\int (x^3 - 4x) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

$$[-1, 0] : 0 - \left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{7}{4} \text{ (プラスのまま)}$$

$$[0, 2] : (-4) - 0 = -4 \text{ (マイナスなので面積は4)}$$

$$[2, 3] : \frac{9}{4} - (-4) = \frac{25}{4} \text{ (プラスのまま)}$$

$$\text{面積} = \frac{7}{4} + 4 + \frac{25}{4} = \frac{7}{4} + \frac{16}{4} + \frac{25}{4} = \frac{48}{4} = 12$$

$y = x^3$ と $y = x$ で囲まれた部分の面積を求めよ（2曲線は $x = -1, 0, 1$ の3点で交わる）。

面積 $\frac{1}{2}$

交点： $x^3 = x$ より $x^3 - x = 0$ 、 $x(x-1)(x+1) = 0$ 、 $x = -1, 0, 1$ 。

$x = -0.5$ で $x^3 = -0.125$ 、 $x = -0.5$ なので $x^3 > x$ （3次関数が上）。

$x = 0.5$ で $x^3 = 0.125$ 、 $x = 0.5$ なので $x > x^3$ （直線が上）。よって $x = 0$ で分割する。

$$[-1, 0] : \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = 0 - \left(-\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

$$[0, 1] : \int_0^1 (x - x^3) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$\text{面積} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。1/6公式の応用と、3次関数の接線がからむ入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

1/6公式の速解

$y = x^2 - 1$ と $y = x + 1$ で囲まれた部分の面積を、1/6公式を使って求めよ。

面積 9/2

交点： $x^2 - 1 = x + 1$ より $x^2 - x - 2 = 0$ 、 $(x - 2)(x + 1) = 0$ 、 $x = -1, 2$ 。

差（直線－放物線） $= (x + 1) - (x^2 - 1) = -x^2 + x + 2 = -(x + 1)(x - 2)$ 、 $a = -1$ ($|a| = 1$)。

$$S = |a| \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} = 1 \times \frac{3^3}{6} = \frac{27}{6}$$

$$\text{面積} = \frac{9}{2}$$

放物線 $y = x^2$ 上の点 $(1, 1)$ における接線と、点 $(-1, 1)$ における接線を求め、この2本の接線と放物線とで囲まれた部分の面積を求めよ。

面積 2/3

$y' = 2x$ 。 $x = 1$ での接線：傾き 2、 $y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$ 。 $x = -1$ での接線：傾き -2、 $y = -2(x + 1) + 1 = -2x - 1$ 。

2本の接線の交点： $2x - 1 = -2x - 1$ より $x = 0$ 、 $y = -1$ (交点 $(0, -1)$)。

区間 $[-1, 0]$ では放物線が上・左の接線 $y = -2x - 1$ が下。区間 $[0, 1]$ では放物線が上・右の接線 $y = 2x - 1$ が下。

$$[-1, 0] : \int_{-1}^0 \{x^2 - (-2x - 1)\} dx = \int_{-1}^0 (x + 1)^2 dx = \left[\frac{(x + 1)^3}{3} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{3}$$

$$[0, 1] : \int_0^1 \{x^2 - (2x - 1)\} dx = \int_0^1 (x - 1)^2 dx = \left[\frac{(x - 1)^3}{3} \right]_0^1 = 0 - \left(-\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

$$\text{面積} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad (\text{放物線と2接線で囲まれる面積は } |a| \frac{(\beta - \alpha)^3}{12} = 1 \times \frac{2^3}{12} = \frac{2}{3} \text{ という公式でも確かめられる})$$

$y = x^2$ と $y = 2x$ で囲まれた部分の面積を、原点を通り x 軸に垂直な直線ではなく、直線 $x = t$ ($0 < t < 2$) で2つの部分に分けたとき、面積が2等分される t の値を求めよ。

$$t = \underline{1}$$

交点： $x^2 = 2x$ より $x = 0, 2$ 。区間内は $y = 2x$ が上。全体の面積は

$$S = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}。半分は \frac{2}{3}。$$

$x = t$ までの面積： $\int_0^t (2x - x^2) dx = t^2 - \frac{t^3}{3}$ 。これが $\frac{2}{3}$ に等しいとして

$$t^2 - \frac{t^3}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{両辺3倍して} \quad 3t^2 - t^3 = 2 \quad \text{整理して} \quad t^3 - 3t^2 + 2 = 0$$

$t = 1$ を代入すると $1 - 3 + 2 = 0$ で成り立つ。因数分解すると $(t - 1)(t^2 - 2t - 2) = 0$ 。

$t^2 - 2t - 2 = 0$ の解は $t = 1 \pm \sqrt{3}$ だが、 $1 + \sqrt{3} \approx 2.73$ 、 $1 - \sqrt{3} \approx -0.73$ はどちらも $0 < t < 2$ の範囲外。

$t = 1$ (差の関数 $2x - x^2$ が $x = 1$ について対称なことからも納得できる)

3次関数 $y = x^3 - 3x + 2$ について、 $x = 1$ における接線を求めよ。また、この接線と曲線とで囲まれた部分の面積を求めよ。

接線の式 $y = \underline{0}$ 面積 $\underline{27/4}$

$f(x) = x^3 - 3x + 2$ 、 $f'(x) = 3x^2 - 3$ 。 $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$ 、 $f'(1) = 3 - 3 = 0$ 。

接線： $y = f(1) + f'(1)(x - 1) = 0$ （すなわちx軸）。 $f'(1) = 0$ なので $x = 1$ は接点であり、曲線は接線（x軸）と $x = 1$ で接する。

もう一方の交点： $x^3 - 3x + 2 = 0$ を解くと、 $x = 1$ が重解であることを使って因数分解すると $(x - 1)^2(x + 2) = 0$ 、よって $x = -2$ 。

$x = 0$ を代入すると $f(0) = 2 > 0$ なので、区間 $[-2, 1]$ では曲線が接線（x軸）より上にある。

$$S = \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1$$

$$x = 1 : \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{4} \quad x = -2 : 4 - 6 - 4 = -6$$

接線は $y = 0$ 、面積 $= \frac{3}{4} - (-6) = \frac{27}{4}$ ($= |a| \frac{(\beta - p)^4}{12} = 1 \times \frac{3^4}{12} = \frac{27}{4}$ の公式でも確認できる)

$y = x^2$ と $y = -x^2 + 4x$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

面積 8/3

交点： $x^2 = -x^2 + 4x$ より $2x^2 - 4x = 0$ 、 $2x(x - 2) = 0$ 、 $x = 0, 2$ 。

$x = 1$ を代入すると $-x^2 + 4x$ 側は 3、 x^2 側は 1 なので $-x^2 + 4x$ が上。

差 $= (-x^2 + 4x) - x^2 = -2x^2 + 4x = -2x(x - 2)$ 、 $a = -2$ ($|a| = 2$)。

1/6公式は放物線と直線に限らず、差が $a(x - \alpha)(x - \beta)$ の形になる2曲線ならいつでも使える。

$$S = |a| \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} = 2 \times \frac{2^3}{6} = 2 \times \frac{8}{6}$$

$$\text{面積} = \frac{8}{3}$$