

不定積分・定積分

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～7）

1

基本公式

$\int_0^2 3x^2 dx$ を求めよ。

値 8

原始関数は $F(x) = x^3$ 。 $F(2) - F(0) = 8 - 0 = 8$

8

2

1次式

$$\int_1^3 (2x + 1) dx \text{ を求めよ。}$$

値 10

原始関数は $F(x) = x^2 + x$ 。 $F(3) - F(1) = (9 + 3) - (1 + 1) = 12 - 2 = 10$

10

3

分数の答え

$$\int_0^1 (x^2 - x) dx \text{ を求めよ。}$$

値 -1/6

原始関数は $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ 。 $F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - 0 = -\frac{1}{6}$

 $-\frac{1}{6}$

4

奇関数（対称区間）

$$\int_{-1}^1 4x^3 dx \text{ を求めよ。}$$

値 0

$4x^3$ は奇関数なので、対称区間 $[-1, 1]$ の積分は0（実際：原始関数 $F(x) = x^4$ 、 $F(1) - F(-1) = 1 - 1 = 0$ ）。

0

5

整式の展開なし

$$\int_0^2 (x^2 + 2x + 1) dx \text{ を求めよ。}$$

値 26/3

原始関数は $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x$ 。 $F(2) - F(0) = \left(\frac{8}{3} + 4 + 2\right) - 0 = \frac{8}{3} +$

$$6 = \frac{26}{3}$$

$$\frac{26}{3}$$

6

上端=下端

$$\int_2^2 (x^2 - 5x + 3) dx \text{ を求めよ。}$$

値 0

上端と下端が同じ（区間の幅が0）なので、計算しなくても**0**。

7

上端と下端が逆

$$\int_1^0 6x dx \text{ を求めよ。}$$

値 -3

原始関数は $F(x) = 3x^2$ 。 $F(0) - F(1) = 0 - 3 = -3$ （上端0・下端1のまま順番通りに代入すればよい）。

$$-3$$

8 $\int_{-2}^2 x^4 dx$ を求めよ。

値 64/5

x^4 は偶関数なので $2 \int_0^2 x^4 dx$ で計算できる。

$$\int_0^2 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{32}{5}。2倍して \frac{64}{5}。$$

$$\frac{64}{5} (= 12.8)$$

9 $\int_{-3}^3 (2x^3 - x) dx$ を求めよ。

値 0

$2x^3$ も $-x$ も奇数次数の項なので、和 $2x^3 - x$ は奇関数。対称区間の積分は**0**。

10

区間の分割の性質

ある関数 $f(x)$ について、 $\int_0^3 f(x) dx = 10$ 、 $\int_3^5 f(x) dx = 6$ が分かっている。このとき $\int_0^5 f(x) dx$ を求めよ。

値 16

$$\text{区間の分割の性質より } \int_0^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx = \int_0^5 f(x) dx。$$

$10 + 6 = 16$ ($f(x)$ の具体的な式が分からなくても、この性質だけで求まる)。

16

11 $\int_1^4 (3x^2 - 2) dx$ を求めよ。

値 57

原始関数は $F(x) = x^3 - 2x$ 。 $F(4) - F(1) = (64 - 8) - (1 - 2) = 56 - (-1) = 57$

57

12 $\int_0^1 (x - 1)^2 dx$ を求めよ。

値 1/3

先に展開する。 $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$

原始関数は $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$ 。 $F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right) - 0 = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$

13 $\int_{-1}^2 (3x^2 + 2x) dx$ を求めよ。

値 12

原始関数は $F(x) = x^3 + x^2$ 。 $F(2) - F(-1) = (8 + 4) - (-1 + 1) = 12 - 0 = 12$

12

14 $\int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx$ を求めよ。

値 0

原始関数は $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$ 。 $F(2) - F(0) = \left(\frac{16}{4} - 8 + 4\right) - 0 =$
 $(4 - 8 + 4) = 0$

0

挑戦 (15~18)

15

微分と積分の関係

$F(x) = \int_2^x (t^2 - 1) dt$ について、 $F'(3)$ を求めよ。

値 8

公式より $F'(x) = x^2 - 1$ (積分計算をしなくてよい)。 $F'(3) = 9 - 1 = 8$

8

16

区間で式が変わる関数（分割）

$0 \leq x \leq 1$ では $f(x) = x^2$ 、 $1 \leq x \leq 3$ では $f(x) = 2x - 1$ であるとき、
 $\int_0^3 f(x) dx$ を求めよ。

値 19/3

式が変わる $x = 1$ で区間を分割し、それぞれ積分してから足す。

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_1^3 (2x - 1) dx = [x^2 - x]_1^3 = (9 - 3) - (1 - 1) = 6$$

$$\text{合計} : \frac{1}{3} + 6 = \frac{19}{3}$$

$$\frac{19}{3}$$

17

偶関数・奇関数の組み合わせ

$\int_{-2}^2 (x^3 + 3x^2 - 2) dx$ を求めよ。

値 8

奇関数の項 x^3 は対称区間の積分が0になるので無視できる。偶関数の部分 $3x^2 - 2$ だけ計算すればよい。

$$2 \int_0^2 (3x^2 - 2) dx = 2 [x^3 - 2x]_0^2 = 2(8 - 4) = 8$$

(確認：原始関数 $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x$ 。 $F(2) = 4 + 8 - 4 = 8$ 、 $F(-2) = 4 - 8 + 4 = 0$ 。 $F(2) - F(-2) = 8$ 。一致する。)

$$8$$

$F(x) = \int_a^x (2t - 4) dt$ について、 $F(1) = -3$ が成り立つとき、定数 a の値を求めよ。(2つあるときはコンマ区切りで入力)

$a =$ 0,4

$$F(x) = [t^2 - 4t]_a^x = (x^2 - 4x) - (a^2 - 4a)$$

$$F(1) = -3 \text{ を代入 : } (1 - 4) - (a^2 - 4a) = -3$$

$$-3 - (a^2 - 4a) = -3 \text{ より } a^2 - 4a = 0$$

$$a(a - 4) = 0 \text{ より } a = 0 \text{ または } a = 4$$

$$a = 0 \text{ または } a = 4$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。未知の関数と定数を求める問題・絶対値つきの定積分など、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

$f(x)$ と定数 a を求める（ a が2つ）

$\int_a^x f(t) dt = x^2 + 3x - 4$ が全ての x について成り立つとき、 $f(x)$ と定数 a を求めよ。

$$f(0) = \underline{3} \quad a = \underline{-4, 1}$$

両辺を x で微分すると、左辺は公式より $f(x)$ になる。

$$f(x) = 2x + 3 \quad (\text{このとき } f(0) = 3)$$

次に $x = a$ を代入すると左辺は $\int_a^a f(t) dt = 0$ 。右辺も $x = a$ を代入して、

$$0 = a^2 + 3a - 4 = (a + 4)(a - 1)$$

$$a = -4 \text{ または } a = 1$$

$$f(x) = 2x + 3, a = -4 \text{ または } a = 1$$

応2

$f(x)$ と定数 a を求める (a が1つに決まる)

$\int_a^x f(t) dt = x^2 - 4x + 4$ が全ての x について成り立つとき、 $f(x)$ と定数 a を求めよ。

$$f(1) = \underline{-2} \quad a = \underline{2}$$

両辺を x で微分すると $f(x) = 2x - 4$ (このとき $f(1) = 2 - 4 = -2$)。

$x = a$ を代入すると左辺は0になるので、

$$0 = a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2$$

これは $(a - 2)^2 = 0$ の形なので、解は $a = 2$ のただ1つに決まる (前問と違い重解になるのがポイント)。

$$f(x) = 2x - 4, a = 2$$

応3

絶対値つき定積分

$\int_0^3 |x^2 - 4| dx$ を求めよ。

値 23/3

絶対値は中身の符号で場合分けする。 $x^2 - 4 = 0$ となるのは $x = 2$ (区間 $[0, 3]$ の中にある)。

$0 \leq x \leq 2$ では $x^2 \leq 4$ なので $x^2 - 4 \leq 0$ 、よって $|x^2 - 4| = 4 - x^2$

$2 \leq x \leq 3$ では $x^2 \geq 4$ なので $x^2 - 4 \geq 0$ 、よって $|x^2 - 4| = x^2 - 4$

$$\int_0^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\int_2^3 (x^2 - 4) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_2^3 = (9 - 12) - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) = -3 + \frac{16}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\text{合計} : \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}$$

$$\frac{23}{3}$$

$\int_{-2}^3 |x-1| dx$ を求めよ。

値 13/2

$x-1=0$ となるのは $x=1$ （区間 $[-2, 3]$ の中にある）。

$-2 \leq x \leq 1$ では $x-1 \leq 0$ なので $|x-1| = 1-x$

$1 \leq x \leq 3$ では $x-1 \geq 0$ なので $|x-1| = x-1$

$$\int_{-2}^1 (1-x) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 = \left(1 - \frac{1}{2} \right) - (-2 - 2) = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$$

$$\int_1^3 (x-1) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^3 = \left(\frac{9}{2} - 3 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$$\text{合計} : \frac{9}{2} + 2 = \frac{13}{2}$$

$$\frac{13}{2} (= 6.5)$$

$f(x) = x^3 + ax$ (a は定数) とする。 $\int_{-2}^2 f(x) dx$ は a の値に関係なく常に 0 になる。その理由を説明せよ。また、 $\int_0^2 f(x) dx = 10$ となるように a の値を求めよ。

$a = \underline{3}$

(理由) x^3 も ax もどちらも奇数次数の項なので、 a の値によらず $f(x) = x^3 + ax$ は常に奇関数。奇関数の対称区間 $[-2, 2]$ での積分は必ず0になる。

(a を求める)

$$\int_0^2 (x^3 + ax) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{a}{2}x^2 \right]_0^2 = \left(\frac{16}{4} + \frac{a}{2} \cdot 4 \right) - 0 = 4 + 2a$$

これが 10 に等しいので、 $4 + 2a = 10$ 、 $2a = 6$ 、 $a = 3$

$a = 3$