

最大・最小、方程式への応用

解答（全21問）

氏名 _____

得点 _____ / 21点

DRILL

練習問題（全16問）

基本（1～8）

1

極小のみが区間内

$y = x^3 - 3x + 1$ ($0 \leq x \leq 2$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 3 ($x = \underline{2}$) 最小値 -1 ($x = \underline{1}$)

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$ 。区間内の解は $x = 1$ のみ。

$f(0) = 1$ $f(1) = -1$ (極小) $f(2) = 3$

$x = 2$ で最大値 3、 $x = 1$ で最小値 -1

2

極小のみが区間内

$y = -x^3 + 3x - 1$ ($-2 \leq x \leq 0$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 1 ($x = \underline{-2}$) 最小値 -3 ($x = \underline{-1}$)

$f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x-1)(x+1)$ 。区間内の解は $x = -1$ のみ。

$f(-2) = 1$ $f(-1) = -3$ (極小) $f(0) = -1$

$x = -2$ で最大値 1、 $x = -1$ で最小値 -3

3

極大のみが区間内

$y = x^3 - 6x^2 + 9x$ ($0 \leq x \leq 2$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 4 ($x = \underline{1}$) 最小値 0 ($x = \underline{0}$)

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$ 。区間内の解は $x = 1$ のみ ($x = 3$ は範囲外)。

$f(0) = 0$ $f(1) = 4$ (極大) $f(2) = 2$

$x = 1$ で最大値 4、 $x = 0$ で最小値 0

4

両端が最大・最小

$y = 2x^3 - 3x^2$ ($-1 \leq x \leq 2$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 4 ($x = \underline{2}$) 最小値 -5 ($x = \underline{-1}$)

$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$ 。区間内の解は $x = 0, 1$ 。

$f(-1) = -5$ $f(0) = 0$ (極大) $f(1) = -1$ (極小) $f(2) = 4$

極値より端点の方が大きい・小さいので、最大・最小は両方とも端点でとる。

$x = 2$ で最大値 4、 $x = -1$ で最小値 -5

5

片方が端点

$y = -x^3 + 3x^2$ ($-1 \leq x \leq 1$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 4 ($x = \underline{-1}$) 最小値 0 ($x = \underline{0}$)

$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2)$ 。区間内の解は $x = 0$ のみ。

$f(-1) = 4$ $f(0) = 0$ (極小) $f(1) = 2$

$x = -1$ で最大値 4、 $x = 0$ で最小値 0

6

極大のみが区間内

$y = x^3 - 3x + 2$ ($-3 \leq x \leq 0$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 4 ($x = \underline{-1}$) 最小値 -16 ($x = \underline{-3}$)

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$ 。区間内の解は $x = -1$ のみ ($x = 1$ は範囲外)。

$f(-3) = -16$ $f(-1) = 4$ (極大) $f(0) = 2$

$x = -1$ で最大値 4、 $x = -3$ で最小値 -16

7

極大・極小とも区間内

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ ($-2 \leq x \leq 4$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 10 ($x = \underline{-1}$) 最小値 -22 ($x = \underline{3}$)

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1)$ 。区間内の解は $x = -1, 3$ 。

$f(-2) = 3$ $f(-1) = 10$ (極大) $f(3) = -22$ (極小) $f(4) = -15$

極大・極小がそれぞれ端点より大きい・小さいので、最大・最小は両方とも極値でとる。

$x = -1$ で最大値 10、 $x = 3$ で最小値 -22

$y = 2x^3 - 3x^2 - 1$ ($2 \leq x \leq 3$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 26 ($x = \underline{3}$) 最小値 3 ($x = \underline{2}$)

$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$ 。 $f'(x) = 0$ の解は $x = 0, 1$ で、どちらも区間 $[2, 3]$ の外。

$x = 2.5$ で符号を確認すると $f'(2.5) = 6(2.5)(1.5) = 22.5 > 0$ なので区間内はずっと増加。

$$f(2) = 16 - 12 - 1 = 3 \quad f(3) = 54 - 27 - 1 = 26$$

$x = 3$ で最大値 26、 $x = 2$ で最小値 3

標準 (9~12)

$y = x^3 - 3x^2$ の極大値は 0 ($x = 0$)、極小値は -4 ($x = 2$) である。方程式 $x^3 - 3x^2 = 1$ の異なる実数解の個数を求めよ。

実数解の個数 1 個

$a = 1$ は極大値 0 より大きい ($a > 0$)。極大値より大きい範囲では、直線 $y = 1$ はグラフと1回しか交わらない。

実数解の個数は 1 個

10

方程式への応用：解の個数

$y = x^3 - 3x^2$ （極大値 0、極小値 -4 ）について、方程式 $x^3 - 3x^2 = -2$ の異なる実数解の個数を求めよ。

実数解の個数 3 個

$a = -2$ は極小値 -4 より大きく、極大値 0 より小さい ($-4 < a < 0$)。この範囲では直線はグラフと3回交わる。

実数解の個数は 3 個

11

方程式への応用：境目の値

$y = x^3 - 3x^2$ （極大値 0、極小値 -4 ）について、方程式 $x^3 - 3x^2 = -4$ の異なる実数解の個数を求めよ。

実数解の個数 2 個

$a = -4$ はちょうど極小値と一致する。この場合、グラフは極小点で直線に接するので、交点は「極小点（重解）」と「もう1か所」の合計2個になる。

実際に $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ を解くと $(x + 1)(x - 2)^2 = 0$ となり、 $x = -1$ と $x = 2$ （重解）の2つの実数解。

実数解の個数は 2 個

1辺が 18cm の正方形の厚紙の四隅から1辺 x cm の正方形を切り取り、ふたのない箱を作る。体積 V を最大にする x の値と、そのときの V を求めよ。

$x = \underline{3}$ 最大値 $V = \underline{432}$

$$V = x(18 - 2x)^2 \quad (0 < x < 9)$$

$$\text{展開して } V = 4x^3 - 72x^2 + 324x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 144x + 324 = 12(x^2 - 12x + 27) = 12(x - 3)(x - 9)$$

$$V'(x) = 0 \text{ より } x = 3, 9. \text{ 定義域内は } x = 3 \text{ のみ。}$$

$x = 3$ の前後で V' は正から負に変わるので極大かつ最大。

$$V(3) = 3 \times (18 - 6)^2 = 3 \times 144 = 432$$

$x = 3$ のとき体積は最大値 432cm^3

挑戦 (13~16)

$y = x^3 - 3x$ ($-2 \leq x \leq 2$) の最大値・最小値を求めよ。(最大・最小となる x が2つあるときは「-2,1」のようにコンマ区切りで入力)

最大値 $\underline{2}$ ($x = \underline{-1,2}$) 最小値 $\underline{-2}$ ($x = \underline{-2,1}$)

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1). \text{ 区間内の解は } x = -1, 1.$$

$$f(-2) = -2 \quad f(-1) = 2 \text{ (極大)} \quad f(1) = -2 \text{ (極小)} \quad f(2) = 2$$

極大値2は端点 $x = 2$ の値2と等しく、極小値-2は端点 $x = -2$ の値-2と等しい。つまり最大値・最小値はどちらも2か所でとる。

$x = -1, 2$ で最大値 2、 $x = -2, 1$ で最小値 -2

$y = x^3 - 12x + 7$ の極大値・極小値を求めよ。また、方程式 $x^3 - 12x + 7 = 0$ の異なる実数解の個数を求めよ。

極大値 23 ($x =$ -2) 極小値 -9 ($x =$ 2)

実数解の個数 3 個

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)。f'(x) = 0 \text{ より } x = -2, 2。$$

$$f(-2) = -8 + 24 + 7 = 23 \text{ (極大)} \quad f(2) = 8 - 24 + 7 = -9 \text{ (極小)}$$

極大値 $23 > 0$ 、極小値 $-9 < 0$ 。極大値が正・極小値が負なので、 $y = f(x)$ のグラフは x 軸と3回交わる（極大値の手前で1回、極大値と極小値の間で1回、極小値の後で1回）。

極大値 23 ($x = -2$)、極小値 -9 ($x = 2$)、実数解の個数は 3 個

たて 10cm、よこ 16cm の長方形の厚紙の四隅から1辺 x cm の正方形を切り取り、ふたのない箱を作る。体積 V を最大にする x の値と、そのときの V を求めよ。

$x =$ 2 最大値 $V =$ 144

$$V = x(16 - 2x)(10 - 2x) \quad (0 < x < 5)$$

$$\text{展開すると } V = 4x^3 - 52x^2 + 160x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160 = 4(3x^2 - 26x + 40) = 4(3x - 20)(x - 2)$$

$$V'(x) = 0 \text{ より } x = 2, \frac{20}{3}。 \text{定義域 } 0 < x < 5 \text{ の中にあるのは } x = 2 \text{ のみ (}$$

$$\frac{20}{3} \approx 6.7 \text{ は範囲外)}。$$

$x = 2$ の前後で V' は正から負に変わるので極大かつ最大。

$$V(2) = 2 \times (16 - 4) \times (10 - 4) = 2 \times 12 \times 6 = 144$$

$x = 2$ のとき体積は最大値 144cm^3

$x \geq 0$ のとき、 $x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$ が成り立つことを証明せよ。

$g(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ とおく。 $g'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ 。

$x \geq 0$ の範囲で $g'(x) = 0$ となるのは $x = 0, 2$ 。

増減表 ($x \geq 0$) :

$x : 0 \rightarrow 2 \rightarrow$

$g'(x) : 0 \quad - \quad 0 \quad +$

$g(x) : 4 \rightarrow 0 \text{ (最小)} \rightarrow$

$x \geq 0$ の範囲で $g(x)$ は $x = 2$ で最小値 $g(2) = 8 - 12 + 4 = 0$ をとる。

最小値が 0 以上（ちょうど 0）なので、 $x \geq 0$ のすべての x について $g(x) \geq 0$ が成り立つ（等号は $x = 2$ のときのみ成立）。

$x \geq 0$ のとき $x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$ （等号は $x = 2$ のとき）。よって題意は示された。

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

解の個数から定数の範囲を求める（逆問題）

方程式 $x^3 - 3x = a$ が異なる3つの実数解をもつような、定数 a の値の範囲を求めよ。（境界の値を「 $t_1 < a < t_2$ 」の t_1, t_2 として入力せよ）

\(\underline{-2} < a < \underline{2} \)

$f(x) = x^3 - 3x$ とおく。 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ 。 $x = -1$ で極大値 $f(-1) = 2$ 、 $x = 1$ で極小値 $f(1) = -2$ 。

方程式 $f(x) = a$ が異なる3つの実数解をもつのは、直線 $y = a$ がグラフと3回交わるとき、つまり a が極小値と極大値の間（両端を含まない）にあるとき。

$$-2 < a < 2$$

応2

文章題の本格版：区間制限つき体積最大

1辺が 12cm の正方形の厚紙の四隅から1辺 x cm の正方形を切り取り、ふたのない箱を作る。ただし部品の強度の関係で $3 \leq x \leq 5$ の範囲でしか作れないとする。体積 V を最大にする x の値と、そのときの V を求めよ。

$x =$ 3 最大値 $V =$ 108

$$V = x(12 - 2x)^2 = 4x^3 - 48x^2 + 144x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x - 2)(x - 6)$$

$V'(x) = 0$ の解は $x = 2, 6$ 。どちらも定義域 $[3, 5]$ の外側 (2 は左外、6 は右外)。

$x = 4$ で符号を確認： $V'(4) = 12(4 - 2)(4 - 6) = 12 \times 2 \times (-2) = -48 < 0$ 。
よって区間 $[3, 5]$ 内は V がずっと減少する。

したがって最大値は区間の左端 $x = 3$ でとる ($x = 2$ が定義域の外にあるため、無条件に頂点を答えにするのは誤り)。

$$V(3) = 3 \times (12 - 6)^2 = 3 \times 36 = 108$$

(参考： $V(5) = 5 \times (12 - 10)^2 = 5 \times 4 = 20$ が最小値)

$x = 3$ のとき体積は最大値 108cm^3 (区間が $3 \leq x \leq 5$ に制限されているため、頂点の $x = 2$ ではなく端点 $x = 3$ が答えになる)

応3

解の個数がちょうど2個になる定数の値

方程式 $x^3 - 3x^2 = a$ が異なる2つの実数解をもつような、定数 a の値をすべて求めよ。(2つある場合は「0,-4」のようにコンマ区切りで入力)

$a =$ 0,-4

$f(x) = x^3 - 3x^2$ とおく。 $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ 。 $x = 0$ で極大値 $f(0) = 0$ 、 $x = 2$ で極小値 $f(2) = -4$ 。

異なる2つの実数解をもつのは、直線 $y = a$ がグラフに接する (極値の点で重なる) とき、つまり a が極大値または極小値とちょうど一致するとき。

$a = 0$ または $a = -4$

$x \geq 1$ のとき、 $2x^3 - 3x^2 - 12x + 21 \geq 0$ が成り立つことを証明せよ。まず $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 21$ の ($x \geq 1$ における) 最小値を求めよ。

最小値 1

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x - 2)(x + 1)$ 。 $x \geq 1$ の範囲で $f'(x) = 0$ となるのは $x = 2$ のみ ($x = -1$ は範囲外)。

増減表 ($x \geq 1$) :

$x : 1 \rightarrow 2 \rightarrow$

$f'(x) : - \quad 0 \quad +$

$f(x) : 8 \rightarrow 1 \text{ (最小)} \rightarrow$

$x \geq 1$ の範囲で $f(x)$ は $x = 2$ で最小値 $f(2) = 16 - 12 - 24 + 21 = 1$ をとる。

最小値が $1 > 0$ なので、 $x \geq 1$ のすべての x について $f(x) \geq 1 > 0$ 、よって $f(x) \geq 0$ も成り立つ。

$x \geq 1$ における最小値は 1 ($x = 2$)。最小値が正なので $x \geq 1$ のとき $2x^3 - 3x^2 - 12x + 21 \geq 0$ が成り立つ。

底面が1辺 x cm の正方形、高さが y cm の直方体があり、表面積が 150cm^2 で一定であるとき、体積 V の最大値を求めよ。

最大値 $V = \underline{125}$ そのとき $x = \underline{5}$ $y = \underline{5}$

表面積の条件は（底面2つ+側面4つ） $2x^2 + 4xy = 150$ 。これを y について解く（ $x > 0$ ）と $y = \frac{150 - 2x^2}{4x} = \frac{75 - x^2}{2x}$ 。

体積は $V = x^2y = x^2 \cdot \frac{75 - x^2}{2x} = \frac{x(75 - x^2)}{2} = \frac{75x - x^3}{2}$ （ $0 < x < \sqrt{75}$ 、 $y > 0$ の条件から）

$V'(x) = \frac{75 - 3x^2}{2}$ 。 $V'(x) = 0$ より $x^2 = 25$ 、 $x > 0$ なので $x = 5$ 。

$x < 5$ で $V'(x) > 0$ （増加）、 $x > 5$ で $V'(x) < 0$ （減少）なので $x = 5$ で極大かつ最大。

$x = 5$ のとき $y = \frac{75 - 25}{10} = \frac{50}{10} = 5$ 。

$V = 5^2 \times 5 = 125$

$x = 5, y = 5$ （立方体）のとき体積は最大値 125cm^3