

接線・関数の増減と極値

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～8）

1

接線の基本公式

$y = x^2 - 4x + 1$ 上の $x = 3$ における接線の傾きと、その式の切片（ $y =$ （傾き） $x +$ （切片）の切片）を求めよ。

傾き 2 切片 -8

$$f(x) = x^2 - 4x + 1, f'(x) = 2x - 4, f'(3) = 2, f(3) = 9 - 12 + 1 = -2.$$

$$\text{接線: } y - (-2) = 2(x - 3)$$

$$y = 2x - 8 \text{ (傾き2、切片-8)}$$

2

傾き0の接線

$y = x^2 + 2x - 3$ 上の $x = -1$ における接線の傾きと切片を求めよ。

傾き 0 切片 -4

$$f'(x) = 2x + 2, f'(-1) = 0. f(-1) = 1 - 2 - 3 = -4.$$

接線: $y = -4$ (頂点での接線なので水平)

傾き0、切片-4

3

3次関数の基本

$y = x^3$ 上の $x = 1$ における接線の傾きと切片を求めよ。

傾き 3 切片 -2

$$f'(x) = 3x^2, f'(1) = 3. f(1) = 1.$$

接線: $y - 1 = 3(x - 1)$

$y = 3x - 2$ (傾き3、切片-2)

4

x=0での接線

$y = x^3 - 2x$ 上の $x = 0$ における接線の傾きと切片を求めよ。

傾き -2 切片 0

$$f'(x) = 3x^2 - 2, f'(0) = -2. f(0) = 0.$$

接線: $y - 0 = -2(x - 0)$

$y = -2x$ (傾き-2、切片0)

5

3次関数・傾き0

$y = x^3 - 3x + 1$ 上の $x = 1$ における接線の傾きと切片を求めよ。

傾き 0 切片 -1

$$f'(x) = 3x^2 - 3, f'(1) = 0. f(1) = 1 - 3 + 1 = -1.$$

接線: $y = -1$

傾き0、切片-1

6

極値の基本

$y = x^3 - 12x$ の極値を求めよ。

極大値 16 ($x = \underline{-2}$) 極小値 -16 ($x = \underline{2}$)

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2). f'(x) = 0 \text{となるのは } x = -2, 2.$$

$x < -2$ で増加、 $-2 < x < 2$ で減少、 $x > 2$ で増加。

$$f(-2) = -8 + 24 = 16, f(2) = 8 - 24 = -16.$$

$x = -2$ で極大値16、 $x = 2$ で極小値-16

7

上に凸型の3次関数

$y = -x^3 + 3x^2 + 1$ の極値を求めよ。

極大値 5 ($x = \underline{2}$) 極小値 1 ($x = \underline{0}$)

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2). f'(x) = 0 \text{となるのは } x = 0, 2.$$

$x < 0$ で減少、 $0 < x < 2$ で増加、 $x > 2$ で減少。

$$f(0) = 1, f(2) = -8 + 12 + 1 = 5.$$

$x = 2$ で極大値5、 $x = 0$ で極小値1

$y = x^2 - x$ 上の $x = \frac{1}{2}$ における接線の傾きと切片を求めよ。

傾き 0 切片 -1/4

$$f'(x) = 2x - 1, \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{接線: } y = -\frac{1}{4}$$

$$\text{傾き0、切片}-\frac{1}{4}$$

標準 (9~14)

9 $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ 上の $x = 2$ における接線の傾きと切片を求めよ。

傾き 12 切片 -19

$$f'(x) = 6x^2 - 6x, \quad f'(2) = 24 - 12 = 12. \quad f(2) = 16 - 12 + 1 = 5.$$

$$\text{接線: } y - 5 = 12(x - 2)$$

$$y = 12x - 19 \quad (\text{傾き12、切片}-19)$$

10 $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ の極値を求めよ。

極大値 4 ($x = \underline{1}$) 極小値 0 ($x = \underline{3}$)

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3). \quad f'(x) = 0 \text{ となるのは } x = 1, 3.$$

$x < 1$ で増加、 $1 < x < 3$ で減少、 $x > 3$ で増加。

$$f(1) = 1 - 6 + 9 = 4, \quad f(3) = 27 - 54 + 27 = 0.$$

$x = 1$ で極大値4、 $x = 3$ で極小値0

11

傾きから点を逆算

$y = x^2 - 2x$ 上で、接線の傾きが 4 となる点の座標を求めよ。

$$x = \underline{3} \quad y = \underline{3}$$

$$f'(x) = 2x - 2。2x - 2 = 4 \text{ より } x = 3。$$

$$f(3) = 9 - 6 = 3。$$

$$\text{点}(3, 3)$$

12

傾きから点を逆算 (3次関数)

$y = x^3 - 4x$ 上で、接線の傾きが 8 となる点の x 座標をすべて求めよ。(コンマ区切りで入力)

$$x = \underline{2,-2}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4。3x^2 - 4 = 8 \text{ より } 3x^2 = 12、x^2 = 4、x = \pm 2。$$

$$x = 2, -2$$

13

$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x$ 上の $x = 3$ における接線の傾きと切片を求めよ。

$$\text{傾き } \underline{7} \quad \text{切片 } \underline{-18}$$

$$f'(x) = x^2 - 2、f'(3) = 9 - 2 = 7。f(3) = 9 - 6 = 3。$$

$$\text{接線: } y - 3 = 7(x - 3)$$

$$y = 7x - 18 \text{ (傾き7、切片-18)}$$

14 $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ の極値を求めよ。

極大値 6 ($x = \underline{-1}$) 極小値 -26 ($x = \underline{3}$)

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1)$ 。 $f'(x) = 0$ となるのは $x = -1, 3$ 。

$x < -1$ で増加、 $-1 < x < 3$ で減少、 $x > 3$ で増加。

$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 1 = 6$ 、 $f(3) = 27 - 27 - 27 + 1 = -26$ 。

$x = -1$ で極大値6、 $x = 3$ で極小値-26

挑戦 (15~18)

15 極大値と極小値の差

$y = 2x^3 - 6x + 1$ について、極大値と極小値の差を求めよ。

差 8

$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x - 1)(x + 1)$ 。 $f'(x) = 0$ となるのは $x = -1, 1$ 。

$x < -1$ で増加、 $-1 < x < 1$ で減少、 $x > 1$ で増加。

$f(-1) = -2 + 6 + 1 = 5$ (極大値)、 $f(1) = 2 - 6 + 1 = -3$ (極小値)。

差は $5 - (-3) = 8$ 。

極大値5、極小値-3、差は8

16

接線とx軸の交点

$y = x^2 - 2x - 3$ 上の $x = 0$ における接線が、x軸と交わる点の x 座標を求めよ。

$$x = \underline{-3/2}$$

$$f'(x) = 2x - 2, f'(0) = -2, f(0) = -3.$$

$$\text{接線: } y - (-3) = -2(x - 0) \text{ より } y = -2x - 3.$$

$$\text{x軸との交点は } y = 0 \text{ とおいて } -2x - 3 = 0, x = -\frac{3}{2}.$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

17

 $f'=0$ でも極値でない例

$y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ について、 $f'(x) = 0$ となる x の値を求めよ。(この x が極値かどうか考えてみよう)

$$x = \underline{-1}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x + 1)^2. f'(x) = 0 \text{となるのは } x = -1 \text{ (重解、1つだけ)}.$$

$$f'(x) = 3(x + 1)^2 \geq 0 \text{ は常に成り立つ (負にならない) ので、} x = -1 \text{ の前後どちらでも } f'(x) \geq 0. \text{ 符号が変わらないので、} x = -1 \text{ は極値ではない (増加し続ける途中で一瞬傾きが0になるだけ).}$$

$$x = -1 \text{ (ただし極値ではない)}$$

$y = -2x^3 + 6x^2 - 1$ の極値を求めよ。

極大値 7 ($x =$ 2) 極小値 -1 ($x =$ 0)

$f'(x) = -6x^2 + 12x = -6x(x - 2)$ 。 $f'(x) = 0$ となるのは $x = 0, 2$ 。

$x < 0$ で減少、 $0 < x < 2$ で増加、 $x > 2$ で減少。

$f(0) = -1$ 、 $f(2) = -16 + 24 - 1 = 7$ 。

$x = 2$ で極大値7、 $x = 0$ で極小値-1

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

極値をもつ条件（ a の範囲）

関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3ax + 1$ が極値をもつような定数 a の範囲について、その境界となる a の値を小さい順に求めよ。

境界の a : 0 と 1

$$f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3a = 3(x^2 + 2ax + a)。$$

極値をもつ $\iff f'(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもつ $\iff x^2 + 2ax + a = 0$ の判別式が正。

$$\text{判別式 } \frac{D}{4} = a^2 - a = a(a - 1)。$$

$a(a - 1) > 0$ を解くと $a < 0$ または $a > 1$ 。

境界の値は $a = 0$ と $a = 1$ （このときは重解、または判別式が0になり極値をもたない）。

境界は $a = 0, 1$ （極値をもつのは $a < 0$ または $a > 1$ ）

関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 12x - 1$ が常に単調増加 (極値をもたない) となるような定数 a の範囲について、その境界となる a の値を小さい順に求めよ。

境界の a : -6 と 6

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 12.$$

常に単調増加 $\iff$ すべての x で $f'(x) \geq 0 \iff$ 判別式 $D \leq 0$ 。

$$D = (2a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 4a^2 - 144.$$

$$4a^2 - 144 \leq 0 \text{ より } a^2 \leq 36, -6 \leq a \leq 6.$$

境界の値は $a = -6$ と $a = 6$ (このときは重解になり、 $f'(x)$ は 0 以上のまま符号を変えないので単調増加は保たれる)。

境界は $a = -6, 6$ (極値をもたないのは $-6 \leq a \leq 6$)

点 $P(2, -2)$ から曲線 $y = x^3 - 3x$ に引ける接線は何本あるか。

本数 3

接点を $(t, t^3 - 3t)$ とおくと、STEP1と同様に接線は $y = (3t^2 - 3)x - 2t^3$ 。

これが点 $P(2, -2)$ を通るので $x = 2, y = -2$ を代入する。

$$-2 = (3t^2 - 3) \cdot 2 - 2t^3$$

$$-2 = 6t^2 - 6 - 2t^3$$

$$2t^3 - 6t^2 + 4 = 0$$

$$t^3 - 3t^2 + 2 = 0$$

$t = 1$ が解 ($1 - 3 + 2 = 0$)。 $(t - 1)$ で割ると $t^3 - 3t^2 + 2 = (t - 1)(t^2 - 2t - 2)$ 。

$t^2 - 2t - 2 = 0$ を解くと $t = 1 \pm \sqrt{3}$ 。

よって $t = 1, 1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}$ の3つの異なる実数解がある。接点の数だけ接線が引けるので、接線は3本。

（一般に、外部の点から3次関数の曲線に引ける接線の本数は、こうしてできる t の3次方程式の実数解の個数と一致する。実数解の個数を判別する一般条件はここでは紹介にとどめる。）

3本

a を正の定数とする。関数 $f(x) = x^3 - 3ax$ の極小値が -16 であるとき、 a の値を求めよ。

$$a = \underline{4}$$

$f'(x) = 3x^2 - 3a = 3(x^2 - a)$ 。 $a > 0$ なので $f'(x) = 0$ となるのは $x = \pm\sqrt{a}$ 。

$x < -\sqrt{a}$ で増加、 $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$ で減少、 $x > \sqrt{a}$ で増加。 よって $x = \sqrt{a}$ で極小値をとる。

$$f(\sqrt{a}) = (\sqrt{a})^3 - 3a\sqrt{a} = a\sqrt{a} - 3a\sqrt{a} = -2a\sqrt{a} = -2a^{\frac{3}{2}}$$

これが -16 なので $-2a^{\frac{3}{2}} = -16$ 、 $a^{\frac{3}{2}} = 8$ 、 $a = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$ 。

検算: $a = 4$ のとき $\sqrt{a} = 2$ 、 $f(2) = 8 - 3 \cdot 4 \cdot 2 = 8 - 24 = -16$ 。(一致)

$$a = 4$$

曲線 $y = x^3 - x$ 上の点 $(1, 0)$ における接線を求め、この接線が曲線と再び交わる点の x 座標を求めよ。

$$x = \underline{-2}$$

$f(x) = x^3 - x$ 、 $f(1) = 1 - 1 = 0$ （確かに点 $(1, 0)$ は曲線上）。

$f'(x) = 3x^2 - 1$ 、 $f'(1) = 2$ 。

接線: $y - 0 = 2(x - 1)$ より $y = 2x - 2$ 。

曲線と接線の交点を求めるため連立する。

$$x^3 - x = 2x - 2$$

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

接点 $x = 1$ は重解になるはずなので、 $(x - 1)^2$ で割れる。

$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$ （展開して確認すると $x^3 - 3x + 2$ に一致する）

よって $x = 1$ （重解、接点）または $x = -2$ 。

再び交わる点は $x = -2$