

# 微分法と積分法 まとめ

問題プリント（全27問）

氏名 \_\_\_\_\_

得点 /27点

## DRILL

### まとめテスト（標準）

#### 基本（1～15）

##### 1 導関数の公式

$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2$  の導関数  $f'(x)$  について、 $x^3$  の係数と  $x$  の係数を求めよ。

$x^3$  の係数   $x$  の係数

##### 2 微分係数の値

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$  について、 $f'(2)$  の値を求めよ。

$f'(2) =$

##### 3 接線の公式（2次関数）

$y = x^2 - 4x + 5$  上の  $x = 1$  における接線の傾きと切片を求めよ。

傾き  切片

##### 4 接線の公式（3次関数）

$y = x^3 - x$  上の  $x = 2$  における接線の傾きと切片を求めよ。

傾き  切片

##### 5 増減の準備： $f'(x)=0$ を解く

$f(x) = x^3 - 12x + 7$  について、 $f'(x) = 0$  となる  $x$  の値をすべて求めよ。

$x =$

##### 6 極値の基本

$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$  の極値を求めよ。

極大値  ( $x =$    
) 極小値  ( $x =$  )

##### 7 区間の最大最小（極値が1つだけ区間内）

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$  ( $-3 \leq x \leq 2$ ) の最大値・最小値を求めよ。

最大値  ( $x =$    
) 最小値  ( $x =$  )

##### 8 区間の最大最小（極値が区間の外→単調）

$y = 2x^3 - 3x^2 + 4$  ( $2 \leq x \leq 4$ ) の最大値・最小値を求めよ。

最大値  ( $x =$    
) 最小値  ( $x =$  )

##### 9 定積分の基本

$\int_0^2 (3x^2 - 4x + 1) dx$  を求めよ。

値

##### 10 定積分（1次式）

$\int_1^3 (2x + 3) dx$  を求めよ。

値

11 奇関数（対称区間）

$$\int_{-1}^1 6x^5 dx \text{ を求めよ。}$$

値

12 展開してから積分

$$\int_0^1 (x-2)^2 dx \text{ を求めよ。}$$

値

13 曲線とx軸（区間全体で正）

$y = x^2 + 1$  のグラフとx軸、および直線  $x = 0$ 、 $x = 2$  で囲まれた部分の面積を求めよ。

面積

14 曲線とx軸（符号が変わる・絶対値注意）

$y = x^2 - 9$  のグラフとx軸、および直線  $x = 0$ 、 $x = 4$  で囲まれた部分の面積を求めよ。

面積

15 曲線とx軸（偶関数の対称性を利用）

$y = -x^2 + 9$  のグラフとx軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

面積

発展（16～25）

16 接点をtとおく（外部の点から引く接線）

点  $P(0, 2)$  から曲線  $y = x^3 - 3x$  に引ける接線は何本あるか。また、その接線の方程式を求めよ。

本数  本 接線の方程式  $y =$

17 極値を求めてから方程式の解の個数へ

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$  の極値を求めよ。また、方程式  $x^3 - 3x^2 - 9x + 5 = 0$  の異なる実数解の個数を求めよ。

極大値  ( $x =$    
) 極小値  ( $x =$  )  
実数解の個数  個

18 区間の最大最小（端点の値も候補になる）

$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$  ( $-1 \leq x \leq 2$ ) の最大値・最小値を求めよ。

最大値  ( $x =$    
) 最小値  ( $x =$  )

19 文章題：表面積一定で体積最大

底面が1辺  $x$  cm の正方形、高さが  $y$  cm の直方体があり、表面積が  $96\text{cm}^2$  で一定であるとき、体積  $V$  の最大値を求めよ。

最大値  $V =$   そのとき  $x =$   
  $y =$

20 不等式の証明（最小値を利用）

$x \geq 0$  のとき、 $x^3 - 3x + 5 \geq 0$  が成り立つことを証明せよ。まず  $f(x) = x^3 - 3x + 5$  の ( $x \geq 0$ における) 最小値を求めよ。

最小値

21 1/6公式の応用

$y = x^2 - 4x$  と  $y = 2x - 5$  で囲まれた部分の面積を、1/6公式を使って求めよ。

面積

22 微分と積分の関係

$F(x) = \int_{-1}^x (2t^3 - 3t^2 + 1) dt$  について、 $F'(2)$  を求めよ。

値

23

絶対値つき定積分

$$\int_0^4 |x^2 - 2x - 3| dx \text{ を求めよ。}$$

値

24

3次関数とx軸（符号が3回変わる）

$y = x^3 - x$  のグラフとx軸、および直線  $x = -2$ 、 $x = 2$  で囲まれた部分の面積を求めよ。

面積

25

総合問題：接線を求めてから面積へ（章の総仕上げ）

曲線  $y = x^3 - 4x + 3$  の  $x = 1$  における接線を求めよ。また、この接線と曲線とで囲まれた部分の面積を求めよ。

接線の式  $y =$ 

 $x +$ 


面積

## D R I L L

## 記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1

「微分と積分は互いに逆の演算である」とはどのようなことか、具体的な式を挙げながら説明せよ。また、この関係が定積分の計算にどのように役立っているかについても述べよ。

|  |
|--|
|  |
|  |
|  |

記2

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$  ( $-2 \leq x \leq 4$ ) の増減を調べ、極値を求めよ。さらにこの区間における最大値・最小値を、増減表と区間の両端の値を示しながら答案として記述せよ。

|  |
|--|
|  |
|  |
|  |

E X A M  
共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 8分/配点 20点

ロボット部の花子さんと太郎さんは、文化祭で展示する部品ケースを、1辺30cmの正方形のアルミ板から作ろうとしている。四隅から1辺 $x$ cmの正方形を切り取り、残りを折り曲げてふたのない箱を作る計画である。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

太郎「底面は1辺 $(30 - 2x)$ cm、高さは $x$ cmの直方体になるね。」

花子「じゃあ、体積 $V$ を $x$ を使った式で表して、微分して増減を調べてみよう。」

- (1) 体積は $V = x(30 - 2x)^2$  ( $0 < x < 15$ ) である。これを展開して整理すると

$$V = 4x^3 - \boxed{\text{アイウ}}x^2 + 900x$$

となる。さらに $V$ を微分すると

$$V' = 12x^2 - \boxed{\text{エオカ}}x + 900$$

となる。アイウ、エオカの値を求めよ。

アイウ  エオカ

- (2)  $V' = 0$ を解くと、 $V' = 12(x - \boxed{\text{キ}})(x - 15)$ の形になる（キには定義域 $0 < x < 15$ の中にある方の解を入れよ）。このとき体積が最大になるのは $x = \boxed{\text{キ}}$ のときで、そのときの体積は $V = \boxed{\text{クケコサ}}$ cm<sup>3</sup>である。

キ  クケコサ

- (3) 太郎「アルミ板の在庫の都合で、実際に切り取れる $x$ の範囲は6以上10以下に制限されることになりました。」  
この範囲 $6 \leq x \leq 10$ で体積が最大になるのは $x = \boxed{\text{シ}}$ のときで、そのときの体積は $V = \boxed{\text{スセソタ}}$ cm<sup>3</sup>である。

シ  スセソタ

大問2 目標時間 8分/配点 20点

花子さんは、文化祭のステージ背景に、2つの放物線 $y = x^2$ と $y = -x^2 + 8x$ で挟まれた部分を色紙で貼ろうと考えている。先生と一緒に、面積を2通りの方法で計算して確かめている。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「まずは交点を求めて、定義通りに定積分で面積を計算してみよう。そのあと、1/6公式でも同じ答えになるか確かめてみよう。」

- (1) 2つの放物線の交点のx座標を、小さい順に求めよ。 $x = \boxed{\text{ア}}$ 、 $x = \boxed{\text{イ}}$

ア  イ

- (2) 区間 $[0, 4]$ では $y = -x^2 + 8x$ が上、 $y = x^2$ が下にある。差を計算すると

$$(-x^2 + 8x) - x^2 = -\boxed{\text{ウ}}x^2 + 8x$$

となる。これを定義通りに定積分すると、面積は $\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

ウ  エオ  カ

- (3) 1/6公式を使って(2)の結果を検算する。差 $-2x^2 + 8x$ の2次の項の係数の絶対値は $|a| = \boxed{\text{キ}}$ であり、公式

$$S = |a| \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} \text{ にあてはめると、面積は } \frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \text{ となる。}$$

キ  クケ  コ