

微分法と積分法 まとめ

解答（全27問）

氏名 _____

得点 _____ / 27点

DRILL

まとめテスト（標準）

基本（1～15）

1

導関数の公式

$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2$ の導関数 $f'(x)$ について、 x^3 の係数と x の係数を求めよ。

x^3 の係数 12 x の係数 2

$(x^n)' = nx^{n-1}$ を各項に適用する。

$(3x^4)' = 12x^3$ 、 $(-2x^3)' = -6x^2$ 、 $(x^2)' = 2x$

$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 2x$ (x^3 の係数12、 x の係数2)

2

微分係数の値

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$ について、 $f'(2)$ の値を求めよ。

$$f'(2) = \underline{36}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x$$

$$f'(2) = 6 \times 4 + 6 \times 2 = 24 + 12 = 36$$

$$f'(2) = 36$$

3

接線の公式 (2次関数)

$y = x^2 - 4x + 5$ 上の $x = 1$ における接線の傾きと切片を求めよ。

$$\text{傾き } \underline{-2} \quad \text{切片 } \underline{4}$$

$$f(1) = 1 - 4 + 5 = 2。f'(x) = 2x - 4、f'(1) = -2。$$

$$\text{接線：} y - 2 = -2(x - 1)$$

$$y = -2x + 4 \text{ (傾き-2、切片4)}$$

4

接線の公式 (3次関数)

$y = x^3 - x$ 上の $x = 2$ における接線の傾きと切片を求めよ。

$$\text{傾き } \underline{11} \quad \text{切片 } \underline{-16}$$

$$f(2) = 8 - 2 = 6。f'(x) = 3x^2 - 1、f'(2) = 11。$$

$$\text{接線：} y - 6 = 11(x - 2)$$

$$y = 11x - 16 \text{ (傾き11、切片-16)}$$

5

増減の準備： $f'(x)=0$ を解く

$f(x) = x^3 - 12x + 7$ について、 $f'(x) = 0$ となる x の値をすべて求めよ。

$$x = \underline{2, -2}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$$

$$3(x - 2)(x + 2) = 0 \text{ より}$$

$$x = 2, -2$$

6

極値の基本

$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ の極値を求めよ。

極大値 6 ($x = \underline{1}$) 極小値 2 ($x = \underline{3}$)

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)。f'(x) = 0 \text{ となるのは } x = 1, 3。$$

$x < 1$ で増加、 $1 < x < 3$ で減少、 $x > 3$ で増加。

$$f(1) = 1 - 6 + 9 + 2 = 6、f(3) = 27 - 54 + 27 + 2 = 2。$$

$x = 1$ で極大値6、 $x = 3$ で極小値2

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ ($-3 \leq x \leq 2$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 7 ($x = \underline{-1}$) 最小値 -25 ($x = \underline{-3}$)

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$ 。 $f'(x) = 0$ の解は $x = -1, 3$ だが、区間 $[-3, 2]$ 内にあるのは $x = -1$ のみ ($x = 3$ は範囲外)。

$x < -1$ で増加、 $-1 < x < 2$ で減少。

$f(-3) = -27 - 27 + 27 + 2 = -25$ $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 2 = 7$ (極大)

$f(2) = 8 - 12 - 18 + 2 = -20$

3つの値 $-25, 7, -20$ を比べると、最大は 7 、最小は -25 。

$x = -1$ で最大値 7 、 $x = -3$ で最小値 -25

$y = 2x^3 - 3x^2 + 4$ ($2 \leq x \leq 4$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 84 ($x = \underline{4}$) 最小値 8 ($x = \underline{2}$)

$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$ 。 $f'(x) = 0$ の解 $x = 0, 1$ はどちらも区間 $[2, 4]$ の外 (左側)。

$x = 3$ で確認すると $f'(3) = 6 \times 3 \times 2 = 36 > 0$ なので区間内はずっと増加。

$f(2) = 16 - 12 + 4 = 8$ $f(4) = 128 - 48 + 4 = 84$

$x = 4$ で最大値 84 、 $x = 2$ で最小値 8

9

定積分の基本

$$\int_0^2 (3x^2 - 4x + 1) dx \text{ を求めよ。}$$

値 2

原始関数は $F(x) = x^3 - 2x^2 + x$ 。 $F(2) - F(0) = (8 - 8 + 2) - 0 = 2$

2

10

定積分（1次式）

$$\int_1^3 (2x + 3) dx \text{ を求めよ。}$$

値 14

原始関数は $F(x) = x^2 + 3x$ 。 $F(3) - F(1) = (9 + 9) - (1 + 3) = 18 - 4 = 14$

14

11

奇関数（対称区間）

$$\int_{-1}^1 6x^5 dx \text{ を求めよ。}$$

値 0

$6x^5$ は奇関数（次数5は奇数）なので、対称区間 $[-1, 1]$ の積分は計算しなくても **0**。

12

展開してから積分

$\int_0^1 (x-2)^2 dx$ を求めよ。

値 $7/3$

先に展開する。 $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

原始関数は $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x$ 。 $F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{3} - 2 + 4\right) - 0 =$

$$\frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$$

$$\frac{7}{3}$$

13

曲線とx軸（区間全体で正）

$y = x^2 + 1$ のグラフとx軸、および直線 $x = 0$ 、 $x = 2$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

面積 $14/3$

区間 $[0, 2]$ で $x^2 + 1 \geq 0$ なのでそのまま積分する。

$$S = \int_0^2 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^2 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}$$

$$\text{面積} = \frac{14}{3}$$

$y = x^2 - 9$ のグラフとx軸、および直線 $x = 0$ 、 $x = 4$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

面積 64/3

$x^2 - 9 = 0$ より $x = \pm 3$ 。区間 $[0, 4]$ の中にある交点は $x = 3$ のみ。

$x = 1$ で $1 - 9 = -8 < 0$ 、 $x = 3.5$ で $12.25 - 9 = 3.25 > 0$ なので、 $x = 3$ で区間を分割する。

$$\int (x^2 - 9) dx = \frac{x^3}{3} - 9x$$

$[0, 3] : (9 - 27) - 0 = -18$ 符号がマイナスなので面積は18。

$$[3, 4] : \left(\frac{64}{3} - 36 \right) - (9 - 27) = \frac{64}{3} - 36 + 18 = \frac{64}{3} - 18 = \frac{10}{3}$$

$$\text{面積} = 18 + \frac{10}{3} = \frac{64}{3}$$

$y = -x^2 + 9$ のグラフとx軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

面積 36

$-x^2 + 9 = 0$ より $x = \pm 3$ 。この区間で $-x^2 + 9 \geq 0$ 。 $-x^2 + 9$ は偶関数なので

$2 \int_0^3 (-x^2 + 9) dx$ で計算できる。

$$\int_0^3 (-x^2 + 9) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 9x \right]_0^3 = -9 + 27 = 18$$

2倍して36。

$$\text{面積} = 36$$

16

接点を t とおく (外部の点から引く接線)

点 $P(0, 2)$ から曲線 $y = x^3 - 3x$ に引ける接線は何本あるか。また、その接線の方程式を求めよ。

本数 1 本 接線の方程式 $y =$ 2

P が曲線上にあるかは分からないので、接点を $(t, t^3 - 3t)$ とおく。 $f'(t) = 3t^2 - 3$ より接線は

$$y - (t^3 - 3t) = (3t^2 - 3)(x - t)$$

$$\text{整理すると } y = (3t^2 - 3)x - 2t^3 \cdots (A)$$

(A)が点 $P(0, 2)$ を通るので、 $x = 0, y = 2$ を代入する。

$$2 = (3t^2 - 3) \times 0 - 2t^3 = -2t^3$$

$$t^3 = -1$$

実数の範囲で $t^3 = -1$ を満たすのは $t = -1$ のみ (他の2解は虚数)。よって接線は1本だけ。

$$t = -1 \text{ のとき傾きは } 3(-1)^2 - 3 = 0、\text{接線は } y = 0 \times x - 2 \times (-1)^3 = 2。$$

(確認：接点は $(-1, f(-1)) = (-1, 2)$ で、 P の座標 $(0, 2)$ と同じ高さの水平な接線になっている。)

接線は1本、 $y = 2$

17

極値を求めてから方程式の解の個数へ

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ の極値を求めよ。また、方程式 $x^3 - 3x^2 - 9x + 5 = 0$ の異なる実数解の個数を求めよ。

極大値 10 ($x = \underline{-1}$) 極小値 -22 ($x = \underline{3}$)

実数解の個数 3 個

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1)。f'(x) = 0よりx = -1, 3。$$

$x < -1$ で増加、 $-1 < x < 3$ で減少、 $x > 3$ で増加。

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10 \text{ (極大)} \quad f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22 \text{ (極小)}$$

極大値 $10 > 0$ 、極小値 $-22 < 0$ 。極大値が正・極小値が負なので、グラフは x 軸と 3 回交わる (極大値の手前で 1 回、極大値と極小値の間で 1 回、極小値の後で 1 回)。

極大値 10 ($x = -1$)、極小値 -22 ($x = 3$)、実数解の個数は 3 個

18

区間の最大最小 (端点の値も候補になる)

$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ ($-1 \leq x \leq 2$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 2 ($x = \underline{1}$) 最小値 -18 ($x = \underline{-1}$)

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)。解x = 1, 3のうち区間[-1, 2]内にあるのはx = 1のみ。$$

$x < 1$ で増加、 $1 < x < 2$ で減少。

$$f(-1) = -1 - 6 - 9 - 2 = -18 \quad f(1) = 1 - 6 + 9 - 2 = 2 \text{ (極大)} \quad f(2) = 8 - 24 + 18 - 2 = 0$$

3つの値 $-18, 2, 0$ を比べると、最大は極大値の 2 、最小は端点 $x = -1$ の -18 ($x = 2$ の値 0 はどちらでもない)。

$x = 1$ で最大値 2 、 $x = -1$ で最小値 -18

底面が1辺 x cm の正方形、高さが y cm の直方体があり、表面積が 96cm^2 で一定であるとき、体積 V の最大値を求めよ。

最大値 $V = \underline{64}$ そのとき $x = \underline{4}$ $y = \underline{4}$

表面積の条件（底面2つ＋側面4つ）は $2x^2 + 4xy = 96$ 。 y について解くと ($x > 0$)

$$y = \frac{96 - 2x^2}{4x} = \frac{48 - x^2}{2x}。$$

体積は $V = x^2y = x^2 \cdot \frac{48 - x^2}{2x} = \frac{x(48 - x^2)}{2} = \frac{48x - x^3}{2}$ ($0 < x < 4\sqrt{3}$ 、 $y > 0$ の条件から)

$$V'(x) = \frac{48 - 3x^2}{2}。 V'(x) = 0 \text{より } x^2 = 16、x > 0 \text{なので } x = 4。$$

$x < 4$ で $V'(x) > 0$ （増加）、 $x > 4$ で $V'(x) < 0$ （減少）なので $x = 4$ で極大かつ最大。

$$x = 4 \text{ のとき } y = \frac{48 - 16}{8} = \frac{32}{8} = 4。$$

$$V = 4^2 \times 4 = 64$$

$x = 4, y = 4$ （立方体）のとき体積は最大値 64cm^3

$x \geq 0$ のとき、 $x^3 - 3x + 5 \geq 0$ が成り立つことを証明せよ。まず $f(x) = x^3 - 3x + 5$ の ($x \geq 0$ における) 最小値を求めよ。

最小値 3

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ 。 $x \geq 0$ の範囲で $f'(x) = 0$ となるのは $x = 1$ のみ ($x = -1$ は範囲外)。

増減表 ($x \geq 0$) :

$x : 0 \rightarrow 1 \rightarrow$

$f'(x) : - \quad 0 \quad +$

$f(x) : (5) \rightarrow 3 \text{ (最小)} \rightarrow$

$x \geq 0$ の範囲で $f(x)$ は $x = 1$ で最小値 $f(1) = 1 - 3 + 5 = 3$ をとる。

最小値が $3 > 0$ なので、 $x \geq 0$ のすべての x について $f(x) \geq 3 > 0$ 、よって $f(x) \geq 0$ も成り立つ。

$x \geq 0$ における最小値は3 ($x = 1$)。最小値が正なので $x \geq 0$ のとき $x^3 - 3x + 5 \geq 0$ が成り立つ。

$y = x^2 - 4x$ と $y = 2x - 5$ で囲まれた部分の面積を、1/6公式を使って求めよ。

面積 32/3

交点 : $x^2 - 4x = 2x - 5$ より $x^2 - 6x + 5 = 0$ 、 $(x-1)(x-5) = 0$ 、 $x = 1, 5$ 。

差 (直線-放物線) $= (2x - 5) - (x^2 - 4x) = -x^2 + 6x - 5 = -(x-1)(x-5)$ 、 $a = -1$ ($|a| = 1$)。

$$S = |a| \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} = 1 \times \frac{4^3}{6} = \frac{64}{6}$$

$$\text{面積} = \frac{32}{3}$$

$F(x) = \int_{-1}^x (2t^3 - 3t^2 + 1) dt$ について、 $F'(2)$ を求めよ。

値 5

公式 $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$ より、積分せずに t を x に置きかえるだけでよい。

$$F'(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

$$F'(2) = 2 \times 8 - 3 \times 4 + 1 = 16 - 12 + 1 = 5$$

$$F'(2) = 5$$

$\int_0^4 |x^2 - 2x - 3| dx$ を求めよ。

値 34/3

$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) = 0$ より $x = -1, 3$ 。区間 $[0, 4]$ の中にある交点は $x = 3$ のみ。

$x = 1$ で $1 - 2 - 3 = -4 < 0$ 、 $x = 3.5$ で $12.25 - 7 - 3 = 2.25 > 0$ なので、
 $0 \leq x \leq 3$ では $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ 、 $3 \leq x \leq 4$ では $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ 。

$$\int (x^2 - 2x - 3) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$$

$[0, 3] : (9 - 9 - 9) - 0 = -9$ 符号がマイナスなので面積分は9。

$$[3, 4] : \left(\frac{64}{3} - 16 - 12 \right) - (-9) = \frac{64}{3} - 28 + 9 = \frac{64}{3} - 19 = \frac{7}{3}$$

$$\int_0^4 |x^2 - 2x - 3| dx = 9 + \frac{7}{3} = \frac{34}{3}$$

$y = x^3 - x$ のグラフとx軸、および直線 $x = -2$ 、 $x = 2$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

面積 5

$x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ より、区間 $[-2, 2]$ の中にある交点は $x = -1, 0, 1$ 。3つに区切って符号を確認する。

$x = -1.5$ で $-1.875 < 0$ 、 $x = -0.5$ で $0.375 > 0$ 、 $x = 0.5$ で $-0.375 < 0$ 、 $x = 1.5$ で $1.875 > 0$ 。

$\int (x^3 - x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ 、 $F(x)$ とおく。

$$F(-2) = 4 - 2 = 2 \quad F(-1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \quad F(0) = 0 \quad F(1) = -\frac{1}{4}$$

$$F(2) = 2$$

$$[-2, -1] : F(-1) - F(-2) = -\frac{1}{4} - 2 = -\frac{9}{4} \quad \text{マイナスなので面積} \frac{9}{4}$$

$$[-1, 0] : F(0) - F(-1) = 0 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \quad \text{プラスのまま}$$

$$[0, 1] : F(1) - F(0) = -\frac{1}{4} \quad \text{マイナスなので面積} \frac{1}{4}$$

$$[1, 2] : F(2) - F(1) = 2 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{4} \quad \text{プラスのまま}$$

$$\text{面積} = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = 5$$

曲線 $y = x^3 - 4x + 3$ の $x = 1$ における接線を求めよ。また、この接線と曲線とで囲まれた部分の面積を求めよ。

接線の式 $y = \underline{-1}x + \underline{1}$ 面積 $\underline{27/4}$

$$f(x) = x^3 - 4x + 3, f'(x) = 3x^2 - 4. f(1) = 1 - 4 + 3 = 0, f'(1) = 3 - 4 = -1.$$

$$\text{接線: } y = 0 + (-1)(x - 1) = -x + 1$$

もう一方の交点を求める。 $x^3 - 4x + 3 = -x + 1$ より $x^3 - 3x + 2 = 0$ 。 $x = 1$ が接点なので重解になっているはずで、 $(x - 1)^2$ で割れる。

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2) \quad (\text{展開して確認すると一致する})$$

よって $x = 1$ （重解、接点）または $x = -2$ 。

$x = 0$ を代入すると、曲線側は $f(0) = 3$ 、接線側は1なので、区間 $[-2, 1]$ では曲線が接線より上にある。

$$S = \int_{-2}^1 \{(x^3 - 4x + 3) - (-x + 1)\} dx = \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1$$

$$x = 1 : \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{4} \quad x = -2 : 4 - 6 - 4 = -6$$

$$\text{接線は } y = -x + 1, \text{ 面積} = \frac{3}{4} - (-6) = \frac{27}{4} (= 6.75)$$

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1

「微分と積分は互いに逆の演算である」とはどういうことか、具体的な式を挙げながら説明せよ。また、この関係が定積分の計算にどのように役立っているかについても述べよ。

「微分と積分が互いに逆の演算である」とは、ある関数を微分してから積分すると（あるいは積分してから微分すると）、元の関数に戻る、という対応関係のことである。

たとえば $f(x) = x^2$ を微分すると $f'(x) = 2x$ になる。この $2x$ をもう一度積分すると $\int 2x \, dx = x^2 + C$ となり、積分定数 C を除けば元の $f(x) = x^2$ に戻っている。これは偶然ではなく、不定積分がそもそも「微分すると $f(x)$ になる関数（原始関数）」として定義されているからである。逆向きにも同じ対応があり、 $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) \, dt = f(x)$ という公式（微分と積分の関係）は、いったん積分してからまた微分すると元の被積分関数に戻ることを表している。

この関係は、定積分を実際に計算する場面で決定的な役割を果たしている。定積分 $\int_a^b f(x) \, dx$ は、本来は面積のように細かく区切って足し合わせて求めたい量であり、そのままでは計算がとても大変である。ところが、微分と積分が逆演算であるという関係を使うと、 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を1つ見つけさえすれば、 $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$ という引き算だけで値が求まる。原始関数を見つける作業は、微分の公式を逆にたどるだけでよいので、べき乗の公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ を知っていれば $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ がすぐに分かる。

このように、微分と積分が逆演算であるという関係のおかげで、本来は難しい「面積の計算」が「原始関数を求めて代入し、引き算する」という機械的な手順に置き換わる。これが、この章で微分法を先に学び、そのあとに積分法を学ぶ理由でもある。

微分してから積分する（またはその逆）と元の関数に戻るという対応関係が、微分と積分が逆演算であるということ。この関係により、本来難しい面積の計算（定積分）が、微分の公式を逆にたどって求めた原始関数の引き算 $F(b) - F(a)$ という機械的な手順に置き換わる。

記2 $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ ($-2 \leq x \leq 4$) の増減を調べ、極値を求めよ。さらにこの区間における最大値・最小値を、増減表と区間の両端の値を示しながら答案として記述せよ。

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10 \text{ とおく。}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$$

$f'(x) = 0$ より $x = -1, 3$ 。どちらも区間 $[-2, 4]$ の中にある。この2つの値の前後で $f'(x)$ の符号を調べる。

$$x = -2 \text{ のとき } f'(-2) = 3(-2 - 3)(-2 + 1) = 3(-5)(-1) = 15 > 0$$

$$x = 0 \text{ のとき } f'(0) = 3(0 - 3)(0 + 1) = 3(-3)(1) = -9 < 0$$

$$x = 4 \text{ のとき } f'(4) = 3(4 - 3)(4 + 1) = 3(1)(5) = 15 > 0$$

よって $x < -1$ で増加、 $-1 < x < 3$ で減少、 $x > 3$ で増加。

$x = -1$ の前後で符号が $+$ $\rightarrow$ 0 $\rightarrow$ $-$ (山型) に変わるので $x = -1$ で極大。

$x = 3$ の前後で符号が $-$ $\rightarrow$ 0 $\rightarrow$ $+$ (谷型) に変わるので $x = 3$ で極小。

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 10 = 15$$

$$f(3) = 27 - 27 - 27 + 10 = -17$$

増減表 (区間 $-2 \leq x \leq 4$) :

x	-2	...	-1	...	3	...	4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	8	$\nearrow$	15 (極大)	$\searrow$	-17 (極小)	$\nearrow$	-10

区間の両端も計算する。 $f(-2) = -8 - 12 + 18 + 10 = 8$ 、 $f(4) = 64 - 48 - 36 + 10 = -10$ 。

極値と両端の値8, 15, -17 , -10 をすべて比べると、いちばん大きいのは極大値15 ($x = -1$)、いちばん小さいのは極小値 -17 ($x = 3$)。今回はどちらも極値の方が両端の値より大きい・小さいので、最大・最小は極値のところで実現する。

$x = -1$ で極大値15、 $x = 3$ で極小値 -17 。区間 $[-2, 4]$ における最大値は15 ($x = -1$)、最小値は -17 ($x = 3$)。

E X A M

共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 8分／配点 20点

ロボット部の花子さんと太郎さんは、文化祭で展示する部品ケースを、1辺30cmの正方形のアルミ板から作ろうとしている。四隅から1辺 x cmの正方形を切り取り、残りを折り曲げてふたのない箱を作る計画である。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

太郎「底面は1辺 $(30 - 2x)$ cm、高さは x cmの直方体になるね。」

花子「じゃあ、体積 V を x を使った式で表して、微分して増減を調べてみよう。」

(1) 体積は $V = x(30 - 2x)^2$ ($0 < x < 15$) である。これを展開して整理すると

$$V = 4x^3 - \boxed{\text{アイウ}}x^2 + 900x$$

となる。さらに V を微分すると

$$V' = 12x^2 - \boxed{\text{エオカ}}x + 900$$

となる。アイウ、エオカの値を求めよ。

アイウ 120 エオカ 240

$V = x(30 - 2x)^2$ を展開する。 $(30 - 2x)^2 = 900 - 120x + 4x^2$ なので

$$V = x(900 - 120x + 4x^2) = 900x - 120x^2 + 4x^3 = 4x^3 - 120x^2 + 900x$$

これを微分すると

$$V' = 12x^2 - 240x + 900$$

$$V = 4x^3 - 120x^2 + 900x, V' = 12x^2 - 240x + 900$$

- (2) $V' = 0$ を解くと、 $V' = 12(x - \boxed{\text{キ}})(x - 15)$ の形になる（キには定義域 $0 < x < 15$ の中にある方の解を入れよ）。このとき体積が最大になるのは $x = \boxed{\text{キ}}$ のときで、そのときの体積は $V = \boxed{\text{クケコサ}} \text{cm}^3$ である。

キ 5 クケコサ 2000

$$V' = 12x^2 - 240x + 900 = 12(x^2 - 20x + 75) = 12(x - 5)(x - 15)$$

$V' = 0$ より $x = 5, 15$ 。定義域 $0 < x < 15$ の中にあるのは $x = 5$ のみ（ $x = 15$ は定義域の端で、正方形が切り取れなくなる境界値）。

$x < 5$ で $V' > 0$ （増加）、 $5 < x < 15$ で $V' < 0$ （減少）なので $x = 5$ で極大かつ最大。

$$V(5) = 5 \times (30 - 10)^2 = 5 \times 400 = 2000$$

$x = 5$ のとき最大値 $V = 2000 \text{cm}^3$

- (3) 太郎「アルミ板の在庫の都合で、実際に切り取れる x の範囲は6以上10以下に制限されることになりました。」

この範囲 $6 \leq x \leq 10$ で体積が最大になるのは $x = \boxed{\text{シ}}$ のときで、そのときの体積は $V = \boxed{\text{スセソタ}} \text{cm}^3$ である。

シ 6 スセソタ 1944

(2)の $V' = 12(x - 5)(x - 15)$ を使う。範囲 $6 \leq x \leq 10$ は、極大点 $x = 5$ より右側にある。

$x = 8$ で確認すると $V'(8) = 12(8 - 5)(8 - 15) = 12 \times 3 \times (-7) = -252 < 0$ なので、この範囲では V はずっと減少する。

したがって最大値は範囲の左端 $x = 6$ でとる。

$$V(6) = 6 \times (30 - 12)^2 = 6 \times 324 = 1944$$

（参考： $x = 10$ のとき $V(10) = 10 \times (30 - 20)^2 = 10 \times 100 = 1000$ で、確かに $x = 6$ の方が大きい。）

$x = 6$ のとき最大値 $V = 1944 \text{cm}^3$

花子さんは、文化祭のステージ背景に、2つの放物線 $y = x^2$ と $y = -x^2 + 8x$ で挟まれた部分を色紙で貼ろうと考えている。先生と一緒に、面積を2通りの方法で計算して確かめている。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「まずは交点を求めて、定義通りに定積分で面積を計算してみよう。そのあと、1/6公式でも同じ答えになるか確かめてみよう。」

(1) 2つの放物線の交点のx座標を、小さい順に求めよ。 $x = \boxed{\text{ア}}$ 、 $x = \boxed{\text{イ}}$

ア 0 イ 4

$$x^2 = -x^2 + 8x \text{ より}$$

$$2x^2 - 8x = 0$$

$$2x(x - 4) = 0$$

$$x = 0, 4$$

$$x = 0, 4$$

(2) 区間 $[0, 4]$ では $y = -x^2 + 8x$ が上、 $y = x^2$ が下にある。差を計算すると

$$(-x^2 + 8x) - x^2 = -\boxed{\text{ウ}}x^2 + 8x$$

となる。これを定義通りに定積分すると、面積は $\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

ウ 2 エオ 64 カ 3

$$\text{差は } (-x^2 + 8x) - x^2 = -2x^2 + 8x.$$

$$S = \int_0^4 (-2x^2 + 8x) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 4x^2 \right]_0^4 = -\frac{128}{3} + 64 = -\frac{128}{3} +$$

$$\frac{192}{3} = \frac{64}{3}$$

$$\text{差は } -2x^2 + 8x, \text{ 面積は } \frac{64}{3}$$

(3)

1/6公式を使って(2)の結果を検算する。差 $-2x^2 + 8x$ の2次の項の係数の絶対値は $|a| = \boxed{\text{キ}}$ であり、公式 $S = |a| \frac{(\beta - \alpha)^3}{6}$ にあてはめると、面積は $\frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ となる。

キ 2 クケ 64 コ 3

差 $-2x^2 + 8x = -2x(x - 4)$ より $a = -2$ 、 $|a| = 2$ 。交点は(1)より $\alpha = 0$, $\beta = 4$ 。

$$S = |a| \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} = 2 \times \frac{4^3}{6} = 2 \times \frac{64}{6} = \frac{128}{6} = \frac{64}{3}$$

(2)の定義通りの計算結果 $\frac{64}{3}$ と一致する。

$|a| = 2$ 、面積は $\frac{64}{3}$ ((2)の結果と一致)