

数II まとめ

解答（全42問）

氏名 _____

得点 _____ / 42点

DRILL

まとめテスト（標準）

基本（1～20）

1

3次式の乗法公式

$(x + 4)^3$ を展開せよ。

x^2 の係数 12 x の係数 48 定数項 64

公式 $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ を $a = x, b = 4$ で使う。

$$x^3 + 3 \times x^2 \times 4 + 3 \times x \times 4^2 + 4^3 = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$$

$$(x + 4)^3 = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$$

$x^3 + 2x^2 - 5x - 2$ を $x + 3$ で割ったときの商を $ax^2 + bx + c$ 、余りを R とするとき、 a, b, c, R を求めよ。

$$a = \underline{1} \quad b = \underline{-1} \quad c = \underline{-2} \quad R = \underline{4}$$

筆算で計算する。

$x^3 \div x = x^2$ 、 $x^2(x + 3) = x^3 + 3x^2$ 、引いて $-x^2 - 5x$ 。
 $-x^2 \div x = -x$ 、 $-x(x + 3) = -x^2 - 3x$ 、引いて $-2x - 2$ 。
 $-2x \div x = -2$ 、 $-2(x + 3) = -2x - 6$ 、引いて 4 。次数が 0 になったので終了。

検算： $(x + 3)(x^2 - x - 2) + 4 = x^3 - x^2 - 2x + 3x^2 - 3x - 6 + 4 = x^3 + 2x^2 - 5x - 2$ 。もとの式と一致する。

商 $x^2 - x - 2$ ($a = 1, b = -1, c = -2$)、余り $R = 4$

$b > 0$ のとき、 $b + \frac{25}{b}$ の最小値を求めよ。

最小値 10 そのとき $b = \underline{5}$

$b > 0$ より $\frac{25}{b} > 0$ なので、相加平均・相乗平均の関係が使える。

$$b + \frac{25}{b} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{25}{b}} = 2\sqrt{25} = 10$$

等号は $b = \frac{25}{b}$ のとき。両辺に b をかけて $b^2 = 25$ 、 $b > 0$ より $b = 5$ 。

$b = 5$ のとき最小値 10

4

複素数の乗法

$(3 + 2i)(1 - 4i)$ を計算せよ。

実部 11 虚部 -10

分配法則で展開し、 $i^2 = -1$ を使う。

$$(3 + 2i)(1 - 4i) = 3 - 12i + 2i - 8i^2 = 3 - 10i - 8 \times (-1) = 3 - 10i + 8 = 11 - 10i$$

実部11、虚部-10 (11 - 10i)

5

判別式と実数解の個数

$2x^2 + 3x + 5 = 0$ について、判別式 D の値と実数解の個数を求めよ。

$D =$ -31 実数解の個数 0 個

$$a = 2, b = 3, c = 5$$

$$D = 3^2 - 4 \times 2 \times 5 = 9 - 40 = -31 \quad D < 0 \text{なので実数解はない（虚数解が2つ）}。$$

$D = -31$ 、実数解は0個

6

解と係数の関係

2次方程式 $x^2 - 5x + 8 = 0$ の2つの解を α, β とする。解と係数の関係を用いて $\alpha + \beta, \alpha\beta$ の値を求めよ。

$\alpha + \beta =$ 5 $\alpha\beta =$ 8

$a = 1, b = -5, c = 8$ なので、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -\frac{-5}{1} = 5, \alpha\beta = \frac{8}{1} = 8$$

$$\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 8$$

7

2点間の距離

2点 A(1, 2)、B(4, 6) の間の距離を求めよ。

$$AB = \underline{5}$$

2点間の距離の公式（三平方の定理）を使う。

$$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$AB = 5$$

8

内分点

2点 A(1, 1)、B(7, 10) を結ぶ線分を 2 : 1 に内分する点の座標を求めよ。

$$x \text{ 座標 } \underline{5} \quad y \text{ 座標 } \underline{7}$$

$m : n = 2 : 1$ の内分点の公式 $\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n} \right)$ を使う。

$$x = \frac{1 \times 1 + 2 \times 7}{2 + 1} = \frac{1 + 14}{3} = 5$$

$$y = \frac{1 \times 1 + 2 \times 10}{2 + 1} = \frac{1 + 20}{3} = 7$$

$$(5, 7)$$

9

2点を通る直線

2点 (1, 2)、(4, 11) を通る直線の傾きと y 切片を求めよ。

$$\text{傾き } \underline{3} \quad y \text{ 切片 } \underline{-1}$$

$$\text{傾き} = \frac{11-2}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$$

点(1, 2)を通るので $y - 2 = 3(x - 1)$ 、整理すると $y = 3x - 1$ 。

傾き3、 y 切片-1

10

円の一般形→標準形

$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ を標準形に直し、中心の座標と半径を求めよ。

中心 x 座標 3 中心 y 座標 -2 半径 5

x, y それぞれ平方完成する。

$$x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9, \quad y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 4$$

$$(x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 - 12 = 0$$

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

中心(3, -2)、半径5

11

度→ラジアン

150° をラジアンで表すと $\frac{\text{ア}}{\text{イ}}\pi$ の形になる。ア、イを求めよ。

ア = 5 イ = 6

$$180^\circ = \pi \text{ (ラジアン)} \text{ なので、 } 1^\circ = \frac{\pi}{180}。$$

$$150^\circ = 150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{150}{180}\pi = \frac{5}{6}\pi$$

$$150^\circ = \frac{5}{6}\pi \text{ (ラジアン)}$$

12

単位円上の値 (第2象限)

 $\theta = 120^\circ$ のとき、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ の値を求めよ。

$$\sin \theta = \underline{\sqrt{3}/2} \quad \cos \theta = \underline{-1/2}$$

$120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$ 。単位円で第2象限の角なので、 60° の値をもとに符号だけ調整する。

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{第2象限で}\sin\text{は正})$$

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \quad (\text{第2象限で}\cos\text{は負})$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

13

加法定理・基本

加法定理を用いて $\sin 75^\circ$ の値を求めよ ($75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ として計算せよ)。

$$\sin 75^\circ = \underline{(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4}$$

加法定理 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ を使う。

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

14

有理数指数

 $8^{\frac{2}{3}}$ の値を求めよ。値 4

$$8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$$

$$8^{\frac{2}{3}} = 4$$

15

対数の性質（積・商）

 $\log_2 24 - \log_2 3$ の値を求めよ。値 3

対数の商の性質 $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$ を使う。

$$\log_2 24 - \log_2 3 = \log_2 \frac{24}{3} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$$

$$\log_2 24 - \log_2 3 = 3$$

16

指数方程式

 $3^{x+1} = 81$ を満たす x の値を求めよ。 $x =$ 3

右辺を底3にそろえる。 $81 = 3^4$ なので

$$3^{x+1} = 3^4$$

底が等しく指数関数は単調なので、指数どうしを比較できる。

$$x + 1 = 4 \quad \text{よって} \quad x = 3$$

$$x = 3$$

17

導関数の公式

 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。 x^2 の係数 6 x の係数 -10

$(x^n)' = nx^{n-1}$ を各項に使う。

$$f'(x) = 2 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 0 = 6x^2 - 10x$$

$$f'(x) = 6x^2 - 10x$$

18

接線の方程式

$y = x^2 - 4x + 1$ の $x = 3$ における接線の方程式を、傾きと y 切片で答えよ。

傾き 2 y 切片 -8

$y' = 2x - 4$ なので、 $x = 3$ での傾きは $2 \times 3 - 4 = 2$ 。

接点の y 座標は $y(3) = 9 - 12 + 1 = -2$ 。

接線： $y - (-2) = 2(x - 3)$ 整理すると $y = 2x - 6 - 2 = 2x - 8$

傾き2、 y 切片-8 (接線 $y = 2x - 8$)

19

増減表→極値

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ の極大値と極小値を求めよ。

極大値 10 ($x =$ -1) 極小値 -22 ($x =$ 3)

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{ より } x = -1, 3$$

増減表を作ると、 $x = -1$ の前後で f' は正から負に変わるので極大、 $x = 3$ の前後で負から正に変わるので極小。

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 5 = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$$

$$f(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 - 9 \times 3 + 5 = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$$

$x = -1$ で極大値10、 $x = 3$ で極小値-22

$\int_1^3 (3x^2 - 2x) dx$ の値を求めよ。

値 18

不定積分は $x^3 - x^2$ 。

$$\left[x^3 - x^2 \right]_1^3 = (3^3 - 3^2) - (1^3 - 1^2) = (27 - 9) - (1 - 1) = 18 - 0 = 18$$

18

標準 (21~34)

$(2x - 1)^6$ の展開における x^4 の項の係数を求めよ。

係数 240

一般項は ${}_6C_r (2x)^{6-r} (-1)^r = {}_6C_r 2^{6-r} (-1)^r x^{6-r}$ 。 x^4 は $6 - r = 4$ より $r = 2$ 。
係数は ${}_6C_2 \times 2^4 \times (-1)^2 = 15 \times 16 \times 1 = 240$ 。

係数は240

実数 x, y について $x^2 + 2xy + 3y^2 \geq 0$ であることを証明せよ。

x についての平方の形を作るために、 $(x + y)^2$ の展開 $x^2 + 2xy + y^2$ を利用する。
 $x^2 + 2xy + 3y^2 = (x^2 + 2xy + y^2) + 2y^2 = (x + y)^2 + 2y^2$

2つの平方の和なので、 $(x + y)^2 \geq 0$ かつ $2y^2 \geq 0$ より
 $(x + y)^2 + 2y^2 \geq 0$

$x^2 + 2xy + 3y^2 \geq 0$ (等号は $x + y = 0$ かつ $y = 0$ 、つまり $x = y = 0$ のとき)

整式 $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ を $(x-1)(x+2)$ で割った余りを $ax+b$ とするとき、 a, b の値を求めよ。

$$a = \underline{8} \quad b = \underline{-11}$$

割り算の等式より $P(x) = (x-1)(x+2)Q(x) + ax + b$ ($Q(x)$ は商)。

$x=1$ を代入すると $(x-1)(x+2)$ の部分が0になるので $P(1) = a + b$ 。

$$P(1) = 1 - 2 + 3 - 5 = -3 \quad \text{よって } a + b = -3 \quad \cdots(1)$$

$x=-2$ を代入すると同様に $P(-2) = -2a + b$ 。

$$P(-2) = -8 - 8 - 6 - 5 = -27 \quad \text{よって } -2a + b = -27 \quad \cdots(2)$$

(1)-(2) : $3a = 24 \quad a = 8$ 。(1)に代入して $b = -11$ 。

検算 : $a + b = 8 - 11 = -3$ (一致)、 $-2a + b = -16 - 11 = -27$ (一致)。

$$a = 8, b = -11$$

方程式 $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ を解け（虚数解はコンマ区切りで入力）。

実数解 $x = \underline{1}$ 虚数解 $x = \underline{1+i, 1-i}$

$P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ とおく。定数項 -2 の約数の中から探すと

$$P(1) = 1 - 3 + 4 - 2 = 0$$

なので、因数定理より $P(x)$ は $x - 1$ を因数にもつ。

実際に割り算すると $P(x) = (x - 1)(x^2 - 2x + 2)$ （筆算・検算で確認できる）。

$x^2 - 2x + 2 = 0$ を解の公式（ b' の公式）で解く。

$$b' = -1, \quad b'^2 - ac = (-1)^2 - 1 \times 2 = 1 - 2 = -1$$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{-1}}{a} = 1 \pm i$$

$$x = 1, 1 + i, 1 - i$$

円 $x^2 + y^2 = 20$ 上の点 $(4, 2)$ における接線の方程式を、傾きと y 切片で答えよ。

傾き $\underline{-2}$ y 切片 $\underline{10}$

円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の公式は $x_1x + y_1y = r^2$ 。

$$4x + 2y = 20$$

両辺を2で割ると $2x + y = 10$ 、整理すると $y = -2x + 10$ 。

傾き -2 、 y 切片 10 （接線 $2x + y = 10$ ）

2点 $A(0, 0)$ 、 $B(6, 0)$ から、 $PA : PB = 1 : 2$ となるように動く点 $P(x, y)$ の軌跡を求めよ。円の中心の座標と半径を答えよ。

中心 x 座標 -2 中心 y 座標 0 半径 4

条件 $PA : PB = 1 : 2$ より $2PA = PB$ 。両辺を2乗して $4PA^2 = PB^2$ とすれば根号が消える。

$$4(x^2 + y^2) = (x - 6)^2 + y^2$$

$$4x^2 + 4y^2 = x^2 - 12x + 36 + y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 + 12x - 36 = 0$$

両辺を3で割って $x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0$ 、 x について平方完成する。

$$(x + 2)^2 - 4 + y^2 - 12 = 0$$

$$(x + 2)^2 + y^2 = 16$$

中心 $(-2, 0)$ 、半径4の円

$\sin \theta = \frac{3}{5}$ 、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\sin 2\theta$ 、 $\cos 2\theta$ の値を求めよ。

$\sin 2\theta =$ 24/25 $\cos 2\theta =$ 7/25

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ なので $\cos \theta > 0$ 。相互関係 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

2倍角の公式を使う。

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 1 - 2 \times \frac{9}{25} = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$$

$$\sin 2\theta = \frac{24}{25}, \cos 2\theta = \frac{7}{25}$$

$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ を $r\sin(\theta + \alpha)$ の形に合成せよ ($0 \leq \alpha < 2\pi$)。

$$r = \underline{2} \quad \alpha = \underline{\pi/6}$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\alpha = \frac{1}{2} \text{ を満たす } \alpha \text{ は } \alpha = \frac{\pi}{6}。$$

$$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

$\log_2(x-1) + \log_2(x-3) < 3$ を解け。

$$x \text{ の範囲は下端} = \underline{3} \quad \text{上端} = \underline{5}$$

$$\text{真数条件: } x-1 > 0 \text{ かつ } x-3 > 0 \text{ より } x > 3 \quad \cdots(1)$$

左辺を1つの対数にまとめる。

$$\log_2(x-1)(x-3) < 3 = \log_2 8$$

底2は1より大きいので、対数は単調増加。真数どうしを比較できる。

$$(x-1)(x-3) < 8$$

$$x^2 - 4x + 3 < 8$$

$$x^2 - 4x - 5 < 0$$

$$(x-5)(x+1) < 0$$

$$-1 < x < 5 \quad \cdots(2)$$

(1)と(2)の共通範囲をとる。

$$3 < x < 5$$

$\log_{10} 2 = 0.3010$ として、 2^{40} は何桁の数か求めよ。

桁数 13 桁

$$\log_{10} 2^{40} = 40 \log_{10} 2 = 40 \times 0.3010 = 12.04$$

$12 \leq \log_{10} 2^{40} < 13$ なので、 $10^{12} \leq 2^{40} < 10^{13}$ 。これは13桁の数であることを意味する（一般に $\log_{10} N$ の整数部分に1を足した値が N の桁数）。

13桁

$f(x) = x^3 - 3x$ ($-2 \leq x \leq 3$) の最大値・最小値を求めよ (x の値が複数あるときはコンマ区切りで入力)。

最大値 18 ($x =$ 3 $)$ 最小値 -2 ($x =$ -2,1 $)$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ 。区間 $[-2, 3]$ の中にある極値は $x = -1$ （極大）、 $x = 1$ （極小）。

候補点（両端点と極値の x ）をすべて調べる。

$$f(-2) = -8 + 6 = -2$$

$$f(-1) = -1 + 3 = 2$$

$$f(1) = 1 - 3 = -2$$

$$f(3) = 27 - 9 = 18$$

比べると、最大は $x = 3$ の18。最小は $x = -2$ と $x = 1$ がどちらも-2で並ぶ（端点と極小値がたまたま同じ値になった）。

$x = 3$ で最大値18、 $x = -2, 1$ で最小値-2

放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2x$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

面積 $\frac{4}{3}$

交点を求める。 $x^2 = 2x$ より $x(x - 2) = 0$ 、 $x = 0, 2$ 。

$0 \leq x \leq 2$ では $2x \geq x^2$ (例えば $x = 1$ で $2 \times 1 = 2 > 1 = 1^2$) なので、上側の曲線は $y = 2x$ 。

$$\text{面積} = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \left(4 - \frac{8}{3} \right) - 0 = \frac{12 - 8}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{面積} = \frac{4}{3}$$

直線 $l: y = \sqrt{3}x - 2$ が x 軸の正の向きとなす角 θ ($0 \leq \theta < \pi$) を求めよ。また、原点を通り l に垂直な直線の傾きを求めよ。

$\theta =$ $\frac{\pi}{3}$ (ラジアン) 垂直な直線の傾き $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

直線の傾きは、 x 軸の正の向きとなす角 θ を用いて $\tan \theta$ で表される（これが三角関数の章の考え方と直線の傾きをつなぐ関係）。

$\tan \theta = \sqrt{3}$ を満たす $0 \leq \theta < \pi$ の角は $\theta = \frac{\pi}{3}$ 。

垂直な2直線の傾きの積は -1 になる（図形と方程式の章で学んだ条件）。 l の傾きは $\sqrt{3}$ なので、垂直な直線の傾きを m とすると

$$\sqrt{3} \times m = -1 \quad m = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \text{ 垂直な直線の傾きは } -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

2次方程式 $x^2 - 4x + 7 = 0$ の解を α, β とする。恒等式 $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$ を用いて、 $\alpha^3 + \beta^3$ の値を求めよ。

$$\alpha^3 + \beta^3 = \underline{\underline{-20}}$$

この方程式は判別式 $D = 16 - 28 = -12 < 0$ なので、 α, β は共役な虚数である。しかし解と係数の関係は実数解のときと同じ形のまま使える。

$$\alpha + \beta = -\frac{-4}{1} = 4, \alpha\beta = \frac{7}{1} = 7$$

恒等式 $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$ に代入する（この恒等式は、式と証明の章で3次の乗法公式から導いたものである）。

$$\alpha^3 + \beta^3 = 4^3 - 3 \times 7 \times 4 = 64 - 84 = -20$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = -20$$

35

総合：微分法×複素数と方程式（単調性と虚数解）

3次方程式 $x^3 - 6x^2 + 21x - 26 = 0$ について、 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 21x - 26$ の導関数 $f'(x)$ がつねに正であることを示し、実数解がただ1つであることを説明せよ。そのうえで、実数解と残り2つの解（虚数解）をすべて求めよ（虚数解はコンマ区切りで入力）。

実数解 $x = \underline{2}$ 虚数解 $x = \underline{2+3i, 2-3i}$

まず $f'(x)$ を計算する。

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 21 = 3(x^2 - 4x + 7)$$

$x^2 - 4x + 7$ の判別式は $D = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 16 - 28 = -12 < 0$ 。判別式が負で x^2 の係数が正なので、この2次式はつねに正である。したがって $f'(x) = 3(x^2 - 4x + 7) > 0$ がすべての x で成り立ち、 $f(x)$ はつねに増加する関数である。増加し続ける関数のグラフは x 軸とちょうど1回しか交わらないので、実数解はただ1つ。

その実数解を因数定理で探す。定数項 -26 の約数を試すと

$$f(2) = 8 - 24 + 42 - 26 = 0$$

なので $x = 2$ が実数解。

割り算すると $f(x) = (x - 2)(x^2 - 4x + 13)$ （筆算・検算で確認できる）。残りの解は $x^2 - 4x + 13 = 0$ を解く。

$$b' = -2, b'^2 - ac = (-2)^2 - 1 \times 13 = 4 - 13 = -9$$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{-9}}{a} = 2 \pm 3i$$

実数解 $x = 2$ 、虚数解 $x = 2 + 3i, 2 - 3i$

円 $x^2 + y^2 = 4$ 上の点を $P(2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とする。 $\sqrt{3}x + y$ (x, y は点Pの座標) の最大値と、そのときの θ を求めよ。

最大値 4 そのとき $\theta =$ $\pi/6$

点Pの座標を代入すると

$$\sqrt{3}x + y = \sqrt{3} \times 2 \cos \theta + 2 \sin \theta = 2\sqrt{3} \cos \theta + 2 \sin \theta$$

これを三角関数の合成で1本のsinにまとめる。 $2 \sin \theta + 2\sqrt{3} \cos \theta$ の形とみて

$$r = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \sin \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ を満たす } \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ なので}$$

$$2 \sin \theta + 2\sqrt{3} \cos \theta = 4 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$$

sinの最大値は1なので、最大値は4。等号は $\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ 、すなわち $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき（これは $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲に入っている）。

$\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき最大値4

x がすべての実数を動くとき、 $2^x + 2^{2-x}$ の最小値を、相加平均・相乗平均の関係を用いて求めよ。

最小値 4 そのとき $x =$ 1

$t = 2^x$ とおく。指数関数の性質より、 x がすべての実数を動くとき t はつねに正の実数を動く ($t > 0$)。

$$2^{2-x} = \frac{2^2}{2^x} = \frac{4}{t} \text{なので}$$

$$2^x + 2^{2-x} = t + \frac{4}{t}$$

$t > 0$ より $\frac{4}{t} > 0$ なので、相加平均・相乗平均の関係が使える。

$$t + \frac{4}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{4}{t}} = 2\sqrt{4} = 4$$

等号は $t = \frac{4}{t}$ のとき、すなわち $t^2 = 4$, $t > 0$ より $t = 2$ 。このとき $2^x = 2$ なので $x = 1$ 。

$x = 1$ のとき最小値4

3次関数 $y = x^3 - 3x$ の $x = 0$ における接線の方程式を求めよ。また、点 $(5, 5)$ からその接線までの距離を求めよ。

接線の傾き -3 距離 $2\sqrt{10}$

$y' = 3x^2 - 3$ なので、 $x = 0$ での傾きは $3 \times 0 - 3 = -3$ 。接点は $(0, 0)$ ($y(0) = 0$)。

接線： $y - 0 = -3(x - 0)$ すなわち $y = -3x$ 、整理すると $3x + y = 0$ 。

点と直線の距離の公式 $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ を、直線 $3x + y = 0$ ($a = 3, b = 1, c = 0$)

と点 $(5, 5)$ に使う。

$$\text{距離} = \frac{|3 \times 5 + 1 \times 5 + 0|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|15 + 5|}{\sqrt{10}} = \frac{20}{\sqrt{10}} = \frac{20\sqrt{10}}{10} = 2\sqrt{10}$$

接線の傾き -3 ($y = -3x$)、距離は $2\sqrt{10}$

$x > 0, y > 0$ で $2x + y = 8$ のとき、相加平均・相乗平均の関係を用いて xy の最大値を求めよ。さらに、直線 $2x + y = 8$ と x 軸・ y 軸で囲まれる三角形の面積を求めよ。

xy の最大値 8 三角形の面積 16

$2x > 0, y > 0$ なので、相加平均・相乗平均の関係が使える。

$$2x + y \geq 2\sqrt{2x \cdot y} = 2\sqrt{2xy}$$

条件 $2x + y = 8$ を代入すると $8 \geq 2\sqrt{2xy}$ 、よって $\sqrt{2xy} \leq 4$ 。両辺とも0以上なので2乗して $2xy \leq 16$ 、すなわち $xy \leq 8$ 。

等号は $2x = y$ のとき。これと $2x + y = 8$ を合わせると $2x + 2x = 8$ 、 $x = 2, y = 4$ 。実際 $xy = 2 \times 4 = 8$ で最大値が実現している。

三角形について。直線 $2x + y = 8$ は x 軸と $y = 0$ のとき $x = 4$ の点 $(4, 0)$ で、 y 軸と $x = 0$ のとき $y = 8$ の点 $(0, 8)$ で交わる。原点・ $(4, 0)$ ・ $(0, 8)$ を頂点とする直角三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16$$

xy の最大値は8 ($x = 2, y = 4$ のとき)、三角形の面積は16

直線 $y = x + k$ と円 $x^2 + y^2 = 8$ が異なる2点A、Bで交わる時、(1) k の値の範囲を求めよ。(2) 交点A、Bの x 座標を α, β とすると、線分ABの長さを k を用いて表せ。(3) 弦ABの長さが4になるときの k の値を求めよ（(3)の答えが2つあるときはコンマ区切りで入力）。

(1) k の範囲は下端 = -4 上端 = 4 (3) $k =$ $2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}$

(1) $y = x + k$ を円の式に代入して y を消去する。

$$x^2 + (x + k)^2 = 8$$

$$2x^2 + 2kx + (k^2 - 8) = 0$$

異なる2点で交わる条件は、この x についての2次方程式が異なる2つの実数解をもつこと、つまり $D > 0$ 。

$$D = (2k)^2 - 4 \times 2 \times (k^2 - 8) = 4k^2 - 8k^2 + 64 = -4k^2 + 64$$

$$-4k^2 + 64 > 0 \text{ より } k^2 < 16, \text{ よって } -4 < k < 4.$$

(2) $2x^2 + 2kx + (k^2 - 8) = 0$ の解が α, β なので、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -\frac{2k}{2} = -k, \quad \alpha\beta = \frac{k^2 - 8}{2}$$

A($\alpha, \alpha + k$)、B($\beta, \beta + k$)なので

$$AB = \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + \{(\alpha + k) - (\beta + k)\}^2} = \sqrt{2(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{2}|\alpha - \beta|$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = k^2 - 4 \times \frac{k^2 - 8}{2} = k^2 - 2(k^2 - 8) = 16 - k^2$$

$$\text{なので } AB = \sqrt{2} \times \sqrt{16 - k^2} = \sqrt{2(16 - k^2)} = \sqrt{32 - 2k^2}$$

(3) $AB = 4$ とおく。

$$\sqrt{32 - 2k^2} = 4$$

$$\text{両辺を2乗して } 32 - 2k^2 = 16$$

$$2k^2 = 16 \quad k^2 = 8 \quad k = \pm 2\sqrt{2}$$

$2\sqrt{2} \approx 2.83$ は(1)の範囲 $-4 < k < 4$ の中にあるので、どちらも条件を満たす。

$$(1) -4 < k < 4 \quad (2) AB = \sqrt{32 - 2k^2} \quad (3) k = \pm 2\sqrt{2}$$

EXAM

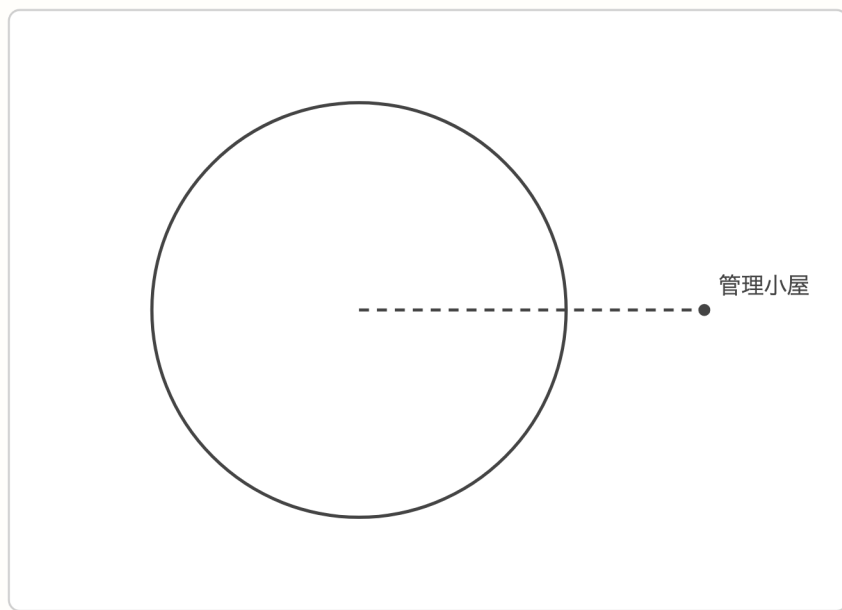
共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 12分／配点 20点

花子さんと太郎さんは、公園にある円形の噴水のまわりの整備計画について話している。噴水の縁は、中心を原点として半径6mの円とみなせる。

花子「噴水のまわりに、扇形の花壇を作りたいな。」

太郎「中心角 $\frac{2}{3}\pi$ （ラジアン）の扇形にしよう。」



半径6mの噴水の縁と、中心から10m離れた地点にある管理小屋。

(1)

半径6m、中心角 $\frac{2}{3}\pi$ の扇形について、弧の長さは $\boxed{\text{ア}}\pi\text{m}$ 、面積は $\boxed{\text{イウ}}\pi\text{m}^2$ である。ア、イウの値を求めよ。

ア 4 イウ 12

弧の長さの公式 $l = r\theta$ を使う。

$$l = 6 \times \frac{2}{3}\pi = 4\pi$$

面積の公式 $S = \frac{1}{2}r^2\theta$ を使う。

$$S = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{2} \times 36 \times \frac{2}{3}\pi = 12\pi$$

弧の長さ $4\pi\text{m}$ 、面積 $12\pi\text{m}^2$

- (2) 太郎「噴水の中心から10m離れた地点に管理小屋があるね。」 管理小屋の位置を点Qとする。点Qから噴水の縁（円）に引いた接線の本数は **エ** 本であり、接線の長さ（Qから接点までの距離）は **オ** mである。エ、オの値を求めよ。

エ 2 オ 8

円の中心をOとする。OQ = 10は半径6より大きいので、Qは円の外部にある。円の外部の点からは、接線がちょうど2本引ける。

接点をTとすると、半径OTと接線QTは垂直に交わるので、直角三角形OTQができる（三平方の定理が使える）。

$$QT = \sqrt{OQ^2 - OT^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$$

接線の本数は2本、接線の長さは8m

- (3) 花子「(2)で求めた接点も使って、もう1つ図形の面積を考えてみよう。」 中心O、管理小屋Q、そして(2)で求めた2つの接点を頂点とする四角形の面積は **カキ** m^2 である。(2)で求めた半径と接線の長さを利用して、カキの値を求めよ。

カキ 48

中心O、管理小屋Q、2つの接点T、T'を結ぶと、四角形OTQT'ができる。半径OT・OT'と接線QT・QT'はそれぞれ垂直に交わるので、この四角形は対角線OQで2つの直角三角形OTQ・OT'Qに分けられる。

(2)よりOT = OT' = 6（半径）、QT = QT' = 8（接線の長さ）なので、直角三角形OTQの面積は

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$$

四角形OTQT'の面積は、この合同な直角三角形2つ分なので

$$24 \times 2 = 48$$

四角形OTQT'の面積は48m²

大問2 目標時間 13分/配点 20点

太郎さんは、文化祭の受付で使う、ふたのない箱を作ろうとしている。1辺30cmの正方形の厚紙の四隅から、1辺 x cmの正方形を切り取り、残りを折り曲げて箱にする計画である。

先生「底面の1辺の長さと、箱の高さを、まず x を使った式で表してみよう。」

太郎「はい。底面の1辺は $(30 - 2x)$ cm、高さは x cmになります。」

- (1) 箱の体積を V cm³とすると、 $V = x(30 - 2x)^2$ である。これを展開して整理すると

$$V = 4x^3 \boxed{\text{アイウ}} x^2 + \boxed{\text{エオカ}} x$$

となる（アイウは符号もつけて入力）。また、 x のとりうる値の範囲は $0 < x < \boxed{\text{キク}}$ である。アイウ、エオカ、キクの値を求めよ。

アイウ -120 エオカ 900 キク 15

$V = x(30 - 2x)^2$ を展開する。

$$(30 - 2x)^2 = 900 - 120x + 4x^2$$

$$V = x(900 - 120x + 4x^2) = 4x^3 - 120x^2 + 900x$$

底面の1辺 $30 - 2x$ は正でなければならないので $x < 15$ 。また x は正の長さなので $x > 0$ 。よって $0 < x < 15$ 。

$$V = 4x^3 - 120x^2 + 900x, 0 < x < 15$$

- (2) 先生「体積が最大になる x を、微分を使って求めよう。」 $V'(x) = 0$ を整理すると $x^2 - 20x + \boxed{\text{ケコ}} = 0$ となる。 $0 < x < 15$ の範囲でこれを解くと $x = \boxed{\text{サ}}$ であり、このとき体積は最大値 $V = \boxed{\text{シスセソ}}$ cm³をとる。ケコ、サ、シ

スセソの値を求めよ。

ケコ 75 サ 5 シスセソ 2000

(1)の $V = 4x^3 - 120x^2 + 900x$ を微分する。

$$V'(x) = 12x^2 - 240x + 900$$

両辺を12で割って整理すると $x^2 - 20x + 75 = 0$

これを解くと、積が75・和が-20になる2数は-5と-15なので $(x - 5)(x - 15) = 0$ 、 $x = 5, 15$ 。定義域 $0 < x < 15$ の中にあるのは $x = 5$ のみ ($x = 15$ は底面の1辺が0になり箱として成り立たない境界値)。

増減表を作ると $x = 5$ の前後で V' が正から負に変わるので、 $x = 5$ で極大かつ最大。

$$V(5) = 5 \times (30 - 10)^2 = 5 \times 400 = 2000$$

$x = 5$ のとき最大値 $V = 2000\text{cm}^3$

(3)

花子「本当に $x = 5$ の前後で増加から減少に変わっているか、確かめてみよう。」

$V'(2) = \boxed{\text{タチツ}}$ 、 $V'(10) = \boxed{\text{テトナ}}$ である (テトナは符号もつけて入力)。この2つの値の符号から、 $x = 5$ で確かに最大になることを確認せよ。

タチツ 468 テトナ -300

$V'(x) = 12x^2 - 240x + 900$ に代入する。

$$V'(2) = 12 \times 4 - 240 \times 2 + 900 = 48 - 480 + 900 = 468$$

$$V'(10) = 12 \times 100 - 240 \times 10 + 900 = 1200 - 2400 + 900 = -300$$

$x = 5$ より小さい $x = 2$ では $V' > 0$ (増加中)、 $x = 5$ より大きい $x = 10$ では $V' < 0$ (減少中)。符号がちょうど $x = 5$ をはさんで正から負に変わっているので、 $x = 5$ で V は極大値かつ、この区間での最大値をとることが確認できる。

$V'(2) = 468 > 0$ 、 $V'(10) = -300 < 0$ 。符号が正→負に変わるので $x = 5$ で最大。

花子さんと太郎さんは、3次方程式 $x^3 - 8 = 0$ を、3次式の因数分解の公式を使って解く方法を考えている。

花子「 $x^3 - 8$ は $x^3 - 2^3$ の形だから、公式 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ が使えるそうだね。」

太郎「因数分解できれば、あとは複素数と方程式の章で学んだ2次方程式の解の公式で解けるね。」

- (1) $x^3 - 8 = 0$ を解くと、実数解は $x = \boxed{\text{ア}}$ であり、残り2つの虚数解は $x = \boxed{\text{イ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{ウ}}}i$ の形になる（イは符号もつけて入力）。ア、イ、ウの値を求めよ。

ア 2 イ -1 ウ 3

公式 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ を $a = x$, $b = 2$ で使う。

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$x - 2 = 0$ より $x = 2$ （実数解）。

$x^2 + 2x + 4 = 0$ を解の公式（ b' の公式、 $b' = 1$ ）で解く。

$$b'^2 - ac = 1^2 - 1 \times 4 = 1 - 4 = -3$$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{-3}}{a} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{1} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

実数解 $x = 2$ 、虚数解 $x = -1 \pm \sqrt{3}i$

- (2) 1の3乗根のうち虚数であるものの1つを ω とすると、 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 、 $\omega^3 = 1$ が成り立つ。このとき $\omega + \omega^2 = \boxed{\text{エ}}$ 、 $\omega \cdot \omega^2 = \boxed{\text{オ}}$ である（エは符号もつけて入力）。エ、オの値を求めよ。

エ -1 オ 1

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$ を変形すると、そのまま

$$\omega + \omega^2 = -1$$

$\omega \cdot \omega^2 = \omega^3$ であり、 $\omega^3 = 1$ なので

$$\omega \cdot \omega^2 = 1$$

(参考：(1)で求めた虚数解 $-1 + \sqrt{3}i$ は、 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ を使うと $x = 2\omega$ と表せる。3次方程式 $x^3 = 8$ の解が実数解2と、それを ω 倍・ ω^2 倍した 2ω , $2\omega^2$ になるのは偶然ではなく、 n 乗根どうしに共通する構造である。)

$$\omega + \omega^2 = -1, \omega \cdot \omega^2 = 1$$

(3)

(1)で求めた3つの解の和と積を、解と係数の関係（3次方程式 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の解の和は $-p$ 、積は $-r$ ）を用いて求めよ。和は $\boxed{\text{力}}$ 、積は $\boxed{\text{キ}}$ である。力、キの値を求めよ。

力 0 キ 8

$x^3 - 8 = 0$ は $x^3 + 0x^2 + 0x - 8 = 0$ の形なので、 $p = 0$, $q = 0$, $r = -8$ 。
解の和は $-p = 0$ 、解の積は $-r = 8$ 。

実際に(1)の解で検算する。

$$\text{和} : 2 + (-1 + \sqrt{3}i) + (-1 - \sqrt{3}i) = 2 - 1 - 1 = 0 \quad (\text{一致})$$

$$\text{積} : 2 \times (-1 + \sqrt{3}i) \times (-1 - \sqrt{3}i) = 2 \times \{(-1)^2 - (\sqrt{3}i)^2\} = 2 \times (1 + 3) = 2 \times 4 = 8 \quad (\text{一致})$$

このように、実際に解を求める方法と、解と係数の関係を使う方法の2通りで、同じ結果にたどり着くことが確認できた。

和は0、積は8

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1 判別式 D を使った場合分け ($D > 0 \cdot D = 0 \cdot D < 0$) は、「複素数と方程式」の章で2次方程式の実数解の個数を調べるために学んだ。この考え方が、「図形と方程式」の章の「円と直線の共有点の個数」でもそのまま使えることを、具体的な例を1つ挙げながら説明せよ。

例として、円 $x^2 + y^2 = 5$ と直線 $y = x + 1$ の共有点の個数を考える。

直線の式を円の式に代入して y を消去すると

$$x^2 + (x + 1)^2 = 5$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 5$$

$$2x^2 + 2x - 4 = 0$$

両辺を2で割って

$$x^2 + x - 2 = 0$$

これは、共有点の x 座標を求めるための、ふつうの2次方程式である。この2次方程式が実数解をいくつもつかによって、円と直線の共有点の個数がそのまま決まる。判別式を計算すると

$$D = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9$$

$D = 9 > 0$ なので、この2次方程式は異なる2つの実数解をもつ。実際に解くと $(x + 2)(x - 1) = 0$ より $x = -2, 1$ となり、円と直線は異なる2点 $(-2, -1)$ 、 $(1, 2)$ で交わることがわかる。

このように、円と直線の共有点の個数を調べる問題は、直線の式を円の式に代入した瞬間に「 x についての2次方程式の実数解の個数を調べる問題」に姿を変える。だから、複素数と方程式の章で学んだ判別式の場合分け ($D > 0$ なら異なる2点で交わる、 $D = 0$ なら接する、 $D < 0$ なら共有点をもたない) を、そのまま持ち込んで使うことができる。円という新しい図形が登場しても、根っこにある道具は同じ2次方程式の判別式なのである。

直線の式を円の式に代入すると、共有点の個数を調べる問題は2次方程式の実数解の個数を調べる問題になる。だから複素数と方程式の章で学んだ判別式 $D > 0 / D = 0 / D < 0$ の場合分けが、円と直線の共有点の個数の判定にもそのまま使える。

記2 3次方程式 $x^3 - 3x + a = 0$ の実数解の個数は、定数 a の値によって変化する。微分を使ってこの理由を説明し、さらに $a = -2$ のときのすべての解を求めよ。

$f(x) = x^3 - 3x$ とおく。方程式 $x^3 - 3x + a = 0$ は $f(x) = -a$ と同じことなので、これは「 $y = f(x)$ のグラフ」と「 $y = -a$ という横向きの直線」が何回交わるか、という問題に置きかえられる。

$f(x)$ の増減を調べるために微分する。

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$$

$f'(x) = 0$ より $x = -1, 1$ 。増減表を作ると、 $x = -1$ で極大値 $f(-1) = -1 + 3 = 2$ 、 $x = 1$ で極小値 $f(1) = 1 - 3 = -2$ をとる。

グラフは、左から増加して $x = -1$ で極大値2、そこから減少して $x = 1$ で極小値-2、そこからまた増加する形をしている。横向きの直線 $y = -a$ がこのグラフと何回交わるかは、直線の高さ $-a$ が極大値2・極小値-2よりどちらに位置するかで決まる。
 $-a > 2$ または $-a < -2$ （すなわち $a < -2$ または $a > 2$ ）のときは、山を越えるか谷を通り抜けるかで交点は1個。

$-a = 2$ または $-a = -2$ （すなわち $a = -2$ または $a = 2$ ）のときは、山または谷にちょうど接するので交点は2個（1つは重解）。

$-2 < -a < 2$ （すなわち $-2 < a < 2$ ）のときは、山と谷の間を横切るので交点は3個。

これが、3次方程式の実数解の個数が a によって変化する理由である。3次以上の方程式では高校では判別式を使わないかわりに、微分による増減表がその役割を果たしている。

次に $a = -2$ の場合を具体的に解く。方程式は $x^3 - 3x - 2 = 0$ 。上の議論で $a = -2$ は境界の場合（極大値2にちょうど接する場合）にあたるので、 $x = -1$ が重解になるはずである。実際に確かめる。

$f(-1) - 2 = 2 - 2 = 0$ なので、因数定理より $x^3 - 3x - 2$ は $(x + 1)$ を因数にもつ。実際に割り算すると

$$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x^2 - x - 2) = (x + 1)(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2)$$

よって解は $x = -1$ （重解）、 $x = 2$ 。

実数解の個数は、 $-2 < a < 2$ で3個、 $a = \pm 2$ で2個（重解を含む）、それ以外で1個。 $a = -2$ のとき解は $x = -1$ （重解）、 $x = 2$ 。