

三角形の面積と計量

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～7）

1

面積公式・基本

三角形ABCにおいて、 $a = 4$ 、 $b = 5$ 、 $\angle C = 30^\circ$ のとき、面積 S を求めよ。

$S =$ 5

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \sin 30^\circ = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

$$S = 5$$

2

面積公式・答えが分数+根号

三角形ABCにおいて、 $a = 6$ 、 $b = 7$ 、 $\angle C = 60^\circ$ のとき、面積 S を求めよ。

$$S = \underline{21\sqrt{3}/2}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 7 \times \sin 60^\circ = 21 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{21\sqrt{3}}{2}$$

3

a,bでなく別の2辺の組でも同じ公式

三角形ABCにおいて、 $a = 8$ 、 $c = 5$ 、 $\angle B = 45^\circ$ のとき、面積 S を求めよ。

$$S = \underline{10\sqrt{2}}$$

$\angle B$ を挟む2辺は a, c なので $S = \frac{1}{2}ac \sin B$ を使う。

$$S = \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \times \sin 45^\circ = 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$

$$S = 10\sqrt{2}$$

4

はさむ角が直角

三角形ABCにおいて、 $b = 10$ 、 $c = 10$ 、 $\angle A = 90^\circ$ のとき、面積 S を求めよ。

$$S = \underline{50}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \sin 90^\circ = 50 \times 1 = 50$$

$$S = 50$$

5

はさむ角が鈍角

三角形ABCにおいて、 $a = 9$ 、 $b = 4$ 、 $\angle C = 150^\circ$ のとき、面積 S を求めよ。

$$S = \underline{9}$$

$$\sin 150^\circ = \frac{1}{2} \text{ なので}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 9 \times 4 \times \frac{1}{2} = 18 \times \frac{1}{2} = 9$$

$$S = 9$$

6

二等辺三角形・鈍角

三角形ABCにおいて、 $a = 6$ 、 $b = 6$ 、 $\angle C = 120^\circ$ のとき、面積 S を求めよ。

$$S = \underline{9\sqrt{3}}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin 120^\circ = 18 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

$$S = 9\sqrt{3}$$

7

面積と周の長さから内接円の半径

ある三角形の面積が24、周の長さが16であるとき、内接円の半径 r を求めよ。

$$r = \underline{3}$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2 \times 24}{16} = \frac{48}{16} = 3$$

$$r = 3$$

- 8 三角形ABCにおいて、 $a = 7$ 、 $b = 8$ 、 $\cos C = \frac{1}{7}$ のとき、面積 S を求めよ。

$$S = \underline{16\sqrt{3}}$$

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 7 \times 8 \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = 28 \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = 16\sqrt{3}$$

$$S = 16\sqrt{3}$$

- 9 三角形の3辺が 8, 15, 17 のとき、面積 S を求めよ。

$$S = \underline{60}$$

辺8と辺15にはさまれる角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{8^2 + 15^2 - 17^2}{2 \times 8 \times 15} = \frac{64 + 225 - 289}{240} = \frac{0}{240} = 0$$

$\cos \theta = 0$ より $\theta = 90^\circ$ 、 $\sin \theta = 1$ 。

$$S = \frac{1}{2} \times 8 \times 15 \times 1 = 60$$

$$S = 60$$

- 10 三角形の3辺が 3, 5, 6 のとき、面積Sを求めよ。

$$S = \underline{2\sqrt{14}}$$

辺3と辺5にはさまれる角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{3^2 + 5^2 - 6^2}{2 \times 3 \times 5} = \frac{9 + 25 - 36}{30} = \frac{-2}{30} = -\frac{1}{15}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{225}} = \sqrt{\frac{224}{225}} = \frac{\sqrt{224}}{15} = \frac{4\sqrt{14}}{15} \quad (224 = 16 \times 14)$$

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{4\sqrt{14}}{15} = \frac{15}{2} \times \frac{4\sqrt{14}}{15} = 2\sqrt{14}$$

$$S = 2\sqrt{14}$$

- 11 縦4、横4、高さ7の直方体の対角線の長さdを求めよ。

$$d = \underline{9}$$

$$d = \sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{16 + 16 + 49} = \sqrt{81} = 9$$

$$d = 9$$

- 12 縦2、横3、高さ4の直方体の対角線の長さdを求めよ。

$$d = \underline{\sqrt{29}}$$

$$d = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}$$

$$d = \sqrt{29}$$

- 13 三角形の3辺が 9, 10, 17 のとき、面積 S と内接円の半径 r を求めよ。

$$S = \underline{36} \quad r = \underline{2}$$

辺9と辺10にはさまれる角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{9^2 + 10^2 - 17^2}{2 \times 9 \times 10} = \frac{81 + 100 - 289}{180} = \frac{-108}{180} = -\frac{3}{5}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 9 \times 10 \times \frac{4}{5} = 45 \times \frac{4}{5} = 36$$

$$\text{周の長さは } 9 + 10 + 17 = 36 \text{ なので } r = \frac{2S}{a + b + c} = \frac{2 \times 36}{36} = 2$$

$$S = 36, r = 2$$

- 14 面積から辺の長さを逆算

三角形ABCにおいて、 $a = 8$ 、 $\angle C = 30^\circ$ 、面積 $S = 10$ のとき、辺 b の長さを求めよ。

$$b = \underline{5}$$

$S = \frac{1}{2}ab \sin C$ に代入する。

$$10 = \frac{1}{2} \times 8 \times b \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 8 \times b \times \frac{1}{2} = 2b$$

$$b = \frac{10}{2} = 5$$

$$b = 5$$

挑戦 (15~18)

15

3辺→面積→内接円の半径 (総合)

三角形の3辺が 4, 5, 6 のとき、面積 S と内接円の半径 r を求めよ。

$$S = \underline{15\sqrt{7}/4} \quad r = \underline{\sqrt{7}/2}$$

辺4と辺5にはさまれる角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \times 4 \times 5} = \frac{16 + 25 - 36}{40} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{64}} = \sqrt{\frac{63}{64}} = \frac{\sqrt{63}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{8} \quad (63 = 9 \times 7)$$

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{3\sqrt{7}}{8} = 10 \times \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{30\sqrt{7}}{8} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

周の長さは $4 + 5 + 6 = 15$ なので

$$r = \frac{2S}{a + b + c} = \frac{2 \times \frac{15\sqrt{7}}{4}}{15} = \frac{\frac{15\sqrt{7}}{2}}{15} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$S = \underline{\frac{15\sqrt{7}}{4}}, \quad r = \underline{\frac{\sqrt{7}}{2}}$$

16

対角線から未知の高さを逆算

縦3、横4の直方体があり、対角線の長さが $3\sqrt{5}$ であるとき、高さ c を求めよ ($c > 0$)。

$$c = \underline{2\sqrt{5}}$$

$$(3\sqrt{5})^2 = 3^2 + 4^2 + c^2$$

$$45 = 9 + 16 + c^2 = 25 + c^2$$

$$c^2 = 20$$

$$c > 0 \text{ より } c = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

$$c = 2\sqrt{5}$$

17

面積から角を逆算

三角形ABCにおいて、 $a = 5$ 、 $b = 8$ 、面積 $S = 10$ のとき、 $\angle C$ の大きさを求めよ。ただし $\angle C$ は鋭角とする。

$$\angle C = \underline{30} \text{ 度}$$

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C \text{ に代入する。}$$

$$10 = \frac{1}{2} \times 5 \times 8 \times \sin C = 20 \sin C$$

$$\sin C = \frac{1}{2}$$

$\angle C$ は鋭角なので $\angle C = 30^\circ$ (150° も $\sin = \frac{1}{2}$ になるが、鈍角なので今回は対象外)。

$$\angle C = 30^\circ$$

三角形の3辺が 10, 17, 21 のとき、面積 S と内接円の半径 r を求めよ。

$$S = \underline{84} \quad r = \underline{7/2}$$

辺17と辺21にはさまれる角（辺10の対角）を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{17^2 + 21^2 - 10^2}{2 \times 17 \times 21} = \frac{289 + 441 - 100}{714} = \frac{630}{714} = \frac{15}{17}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{225}{289}} = \sqrt{\frac{64}{289}} = \frac{8}{17}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 17 \times 21 \times \frac{8}{17} = \frac{1}{2} \times 21 \times 8 = 84$$

周の長さは $10 + 17 + 21 = 48$ なので

$$r = \frac{2S}{a + b + c} = \frac{2 \times 84}{48} = \frac{168}{48} = \frac{7}{2}$$

$$S = 84, r = \frac{7}{2} (= 3.5)$$

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。正四面体・円に内接する四角形・角の二等分線など、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

正四面体の高さ・体積

1辺の長さが6の正四面体がある。この正四面体の高さ h と体積 V を求めよ。

$$h = \underline{2\sqrt{6}} \quad V = \underline{18\sqrt{2}}$$

正四面体の頂点から底面（1辺6の正三角形）へ垂線をおろすと、その足は底面の重心（正三角形の中心）に一致する。まず重心から頂点までの距離を求める。

正三角形の1本の中線（頂点から対辺の中点までの線）の長さは $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$ 。

重心は中線を頂点側から2 : 1に内分するので、重心から頂点までの距離は $\frac{2}{3} \times 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

底面の重心・頂点・正四面体の頂点でできる直角三角形（重心の真上に正四面体の頂点がある）に三平方の定理を使う。

$$h = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 - 12} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

次に底面積を求める。1辺6の正三角形の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 9\sqrt{3}$ 。

体積は「底面積×高さ÷3」なので

$$V = \frac{1}{3} \times 9\sqrt{3} \times 2\sqrt{6} = \frac{1}{3} \times 18\sqrt{18} = \frac{1}{3} \times 18 \times 3\sqrt{2} = 18\sqrt{2} \quad (\sqrt{18} = 3\sqrt{2})$$

$$\text{高さ } h = 2\sqrt{6}、\text{体積 } V = 18\sqrt{2}$$

円に内接する四角形ABCDにおいて、 $AB = 8$ 、 $BC = 5$ 、 $\angle ABC = 60^\circ$ 、 $CD = 3$ 、 $DA = 5$ とする。対角線ACの長さと、四角形ABCDの面積を求めよ。

$AC = \underline{7}$ 面積 $\underline{55\sqrt{3}/4}$

四角形ABCDは円に内接するので、向かい合う角の和は 180° 。よって $\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ 。

対角線ACによって四角形は三角形ABCと三角形ACDに分かれる。それぞれで余弦定理を使い、同じ対角線ACを2通りに表す。

$$\text{三角形ABCで：} AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos 60^\circ = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \frac{1}{2} = 64 + 25 - 40 = 49$$

$$\text{三角形ACDで（確かめ）：} AC^2 = CD^2 + DA^2 - 2 \times CD \times DA \times \cos 120^\circ = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 9 + 25 + 15 = 49$$

両方から同じ $AC^2 = 49$ が出て一致した。 $AC > 0$ より $AC = 7$ 。

次に面積。三角形ABCの面積：

$$S_1 = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

三角形ACDの面積：

$$S_2 = \frac{1}{2} \times CD \times DA \times \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

四角形の面積は対角線で分けた2つの三角形の和なので

$$S_1 + S_2 = 10\sqrt{3} + \frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{40\sqrt{3}}{4} + \frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{55\sqrt{3}}{4}$$

$$AC = 7、\text{四角形ABCDの面積} = \frac{55\sqrt{3}}{4}$$

三角形ABCにおいて、 $\angle A$ の二等分線が辺BCと交わる点をDとする。 $AB = 6$ 、 $AC = 10$ 、 $\angle A = 120^\circ$ のとき、三角形ABDと三角形ACDの面積比、およびそれぞれの面積を求めよ。

面積比 (ABD:ACD) = 3:5 ABDの面積 = $\frac{45\sqrt{3}}{8}$ ACDの面積 = $\frac{75\sqrt{3}}{8}$

ADは $\angle A = 120^\circ$ を二等分するので、 $\angle BAD = \angle CAD = 60^\circ$ 。

三角形ABDと三角形ACDは、どちらもADを1辺に共有し、ADとのはさむ角がともに 60° で等しい。面積公式を使うと

$$\text{三角形ABDの面積} = \frac{1}{2} \times AB \times AD \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times AD \times \sin 60^\circ$$

$$\text{三角形ACDの面積} = \frac{1}{2} \times AC \times AD \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 10 \times AD \times \sin 60^\circ$$

ADと $\sin 60^\circ$ の部分は共通なので、面積の比はそのまま $AB : AC = 6 : 10 = 3 : 5$ になる。

三角形ABC全体の面積を求めると

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$$

比が3 : 5（全体を8等分）なので

$$\text{三角形ABDの面積} = \frac{3}{8} \times 15\sqrt{3} = \frac{45\sqrt{3}}{8}$$

$$\text{三角形ACDの面積} = \frac{5}{8} \times 15\sqrt{3} = \frac{75\sqrt{3}}{8}$$

$$(\text{確かめ: } \frac{45\sqrt{3}}{8} + \frac{75\sqrt{3}}{8} = \frac{120\sqrt{3}}{8} = 15\sqrt{3} \text{で一致})$$

面積比 3 : 5、ABDの面積 = $\frac{45\sqrt{3}}{8}$ 、ACDの面積 = $\frac{75\sqrt{3}}{8}$

三角形の3辺が 7, 8, 9 のとき、面積 S 、内接円の半径 r 、外接円の半径 R をすべて求めよ。

$$S = \underline{12\sqrt{5}} \quad r = \underline{\sqrt{5}} \quad R = \underline{21\sqrt{5}/10}$$

辺7と辺8にはさまれる角（辺9の対角）を C とすると

$$\cos C = \frac{7^2 + 8^2 - 9^2}{2 \times 7 \times 8} = \frac{49 + 64 - 81}{112} = \frac{32}{112} = \frac{2}{7}$$

$$\sin C = \sqrt{1 - \frac{4}{49}} = \sqrt{\frac{45}{49}} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 7 \times 8 \times \frac{3\sqrt{5}}{7} = 28 \times \frac{3\sqrt{5}}{7} = 12\sqrt{5}$$

周の長さは $7 + 8 + 9 = 24$ なので、内接円の半径は

$$r = \frac{2S}{a + b + c} = \frac{2 \times 12\sqrt{5}}{24} = \frac{24\sqrt{5}}{24} = \sqrt{5}$$

外接円の半径は正弦定理を使う。辺7の対角を A とすると

$$\cos A = \frac{8^2 + 9^2 - 7^2}{2 \times 8 \times 9} = \frac{64 + 81 - 49}{144} = \frac{96}{144} = \frac{2}{3}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{7}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{21}{\sqrt{5}} = \frac{21\sqrt{5}}{5}$$

$$R = \frac{21\sqrt{5}}{10}$$

$$S = 12\sqrt{5}, r = \sqrt{5}, R = \frac{21\sqrt{5}}{10}$$

三角形の形をした土地があり、辺 $AB=80\text{m}$ 、辺 $AC=30\text{m}$ 、 $\angle A=60^\circ$ である。
この土地の面積 S （平方メートル）と、この土地にぴったり収まる円（内接円）の半径 r を求めよ。

$$S = \underline{600\sqrt{3}} \quad r = \underline{20\sqrt{3}/3}$$

まず面積を求める。 $\angle A$ を挟む2辺は AB 、 AC なので

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 80 \times 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1200 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 600\sqrt{3}$$

内接円の半径には、残りの1辺 BC の長さも必要。余弦定理より

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos 60^\circ = 80^2 + 30^2 - 2 \times 80 \times 30 \times \frac{1}{2} = 6400 + 900 - 2400 = 4900$$

$$BC > 0 \text{ より } BC = \sqrt{4900} = 70\text{m}.$$

周の長さは $80 + 30 + 70 = 180\text{m}$ なので

$$r = \frac{2S}{AB + AC + BC} = \frac{2 \times 600\sqrt{3}}{180} = \frac{1200\sqrt{3}}{180} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{面積 } S = 600\sqrt{3}\text{m}^2、\text{内接円の半径 } r = \frac{20\sqrt{3}}{3}\text{m}$$