

正弦定理・余弦定理

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～7）

1

正弦定理・外接円の半径

三角形ABCにおいて、 $\angle A = 30^\circ$ 、 $a = 6$ のとき、外接円の半径Rを求めよ。

$R =$ 6

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{6}{\sin 30^\circ} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12$$

$$R = 6$$

2

正弦定理・2角1辺

三角形ABCにおいて、 $\angle A = 60^\circ$ 、 $a = 6$ 、 $\angle B = 45^\circ$ のとき、辺bと外接円の半径Rを求めよ。

$$b = \underline{2\sqrt{6}} \quad R = \underline{2\sqrt{3}}$$

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{6}{\sin 60^\circ} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}、\text{よって } R = 2\sqrt{3}。$$

$$b = 2R \sin B = 4\sqrt{3} \times \sin 45^\circ = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}$$

$$b = 2\sqrt{6}、R = 2\sqrt{3}$$

3

余弦定理・辺を求める（鋭角）

三角形ABCにおいて、 $b = 4$ 、 $c = 6$ 、 $\angle A = 60^\circ$ のとき、辺aの長さを求めよ。

$$a = \underline{2\sqrt{7}}$$

$$a^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \times \cos 60^\circ = 16 + 36 - 48 \times \frac{1}{2} = 52 - 24 = 28$$

$$a = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

$$a = 2\sqrt{7}$$

4

余弦定理・辺を求める（鈍角）

三角形ABCにおいて、 $b = 6$ 、 $c = 10$ 、 $\angle A = 120^\circ$ のとき、辺aの長さを求めよ。

$$a = \underline{14}$$

$$a^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \cos 120^\circ = 36 + 100 - 120 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 136 + 60 = 196$$

$$a = \sqrt{196} = 14$$

$$a = 14$$

5

余弦定理・角を求める

三角形の3辺が 7, 13, 15 のとき、辺13の対角の大きさを求めよ。

$$\text{対角} = \underline{60} \text{ 度}$$

辺13の対角を θ とすると、残り2辺は7と15。

$$\cos \theta = \frac{7^2 + 15^2 - 13^2}{2 \times 7 \times 15} = \frac{49 + 225 - 169}{210} = \frac{105}{210} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60^\circ$$

6

余弦定理・角を求める（直角）

三角形の3辺が 5, 12, 13 のとき、辺13の対角の大きさを求めよ。

対角 = 90 度

辺13の対角を θ とすると、残り2辺は5と12。

$$\cos \theta = \frac{5^2 + 12^2 - 13^2}{2 \times 5 \times 12} = \frac{25 + 144 - 169}{120} = \frac{0}{120} = 0$$

$\cos \theta = 0$ となるのは $\theta = 90^\circ$ のときだけ。

$\theta = 90^\circ$ (直角)

7

正弦定理・半径から辺を求める

三角形ABCの外接円の半径が $R = 4$ 、 $\angle A = 120^\circ$ のとき、辺aの長さを求めよ。

$a =$ $4\sqrt{3}$

$$a = 2R \sin A = 2 \times 4 \times \sin 120^\circ = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$a = 4\sqrt{3}$$

標準（8～14） ※パターンは自分で判定

8

三角形ABCにおいて、 $b = 5$ 、 $c = 21$ 、 $\angle A = 60^\circ$ のとき、辺aの長さを求めよ。

$a =$ 19

$$a^2 = 5^2 + 21^2 - 2 \times 5 \times 21 \times \cos 60^\circ = 25 + 441 - 210 \times \frac{1}{2} = 466 - 105 = 361$$

$$a = \sqrt{361} = 19$$

$$a = 19$$

- 9 三角形ABCにおいて、 $b = 7$ 、 $c = 8$ 、 $\angle A = 120^\circ$ のとき、辺aの長さを求めよ。

$$a = \underline{13}$$

$$a^2 = 7^2 + 8^2 - 2 \times 7 \times 8 \times \cos 120^\circ = 49 + 64 - 112 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 113 + 56 = 169$$

$$a = \sqrt{169} = 13$$

$$a = 13$$

- 10 三角形の3辺が 5, 16, 19 のとき、辺19の対角の大きさを求めよ。

$$\text{対角} = \underline{120} \text{ 度}$$

辺19の対角を θ とすると、残り2辺は5と16。

$$\cos \theta = \frac{5^2 + 16^2 - 19^2}{2 \times 5 \times 16} = \frac{25 + 256 - 361}{160} = \frac{-80}{160} = -\frac{1}{2}$$

$\cos \theta = -\frac{1}{2}$ となるのは $\theta = 120^\circ$ のとき。

$$\theta = 120^\circ$$

- 11 三角形の3辺が 8, 15, 17 のとき、辺17の対角の大きさを求めよ。

$$\text{対角} = \underline{90} \text{ 度}$$

辺17の対角を θ とすると、残り2辺は8と15。

$$\cos \theta = \frac{8^2 + 15^2 - 17^2}{2 \times 8 \times 15} = \frac{64 + 225 - 289}{240} = \frac{0}{240} = 0$$

$$\theta = 90^\circ \text{ (直角)}$$

- 12 三角形ABCにおいて、 $\angle B = 135^\circ$ 、 $b = 6\sqrt{2}$ 、 $\angle A = 30^\circ$ のとき、辺aの長さを求めよ。

$$a = \underline{6}$$

$$\text{正弦定理より } 2R = \frac{b}{\sin B} = \frac{6\sqrt{2}}{\sin 135^\circ} = \frac{6\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 6\sqrt{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 12$$

$$a = 2R \sin A = 12 \times \sin 30^\circ = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

$$a = 6$$

- 13 三角形の3辺が 6, 7, 9 のとき、最も大きい角は鋭角・直角・鈍角のいずれか答えよ。（「鋭角」「直角」「鈍角」のいずれかで入力）

鋭角

最も大きい角は、最も長い辺9の対角。その角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{6^2 + 7^2 - 9^2}{2 \times 6 \times 7} = \frac{36 + 49 - 81}{84} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$$

$\cos \theta = \frac{1}{21} > 0$ なので θ は鋭角。最も大きい角が鋭角ということは、他の角はさらに小さいので全部鋭角。

鋭角（鋭角三角形）

- 14 川の両岸に点B、Cがあり、 $BC = 20\text{m}$ である。対岸の点Aを観測すると、 $\angle ABC = 60^\circ$ 、 $\angle ACB = 30^\circ$ であった。辺ACと辺ABの長さを求めよ。

$$AC = \underline{10\sqrt{3}} \text{ m} \quad AB = \underline{10} \text{ m}$$

三角形ABCにおいて、辺 $a (= BC) = 20$ 、 $\angle B = 60^\circ$ 、 $\angle C = 30^\circ$ 。角の和より
 $\angle A = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$ 。

$$\text{正弦定理より } 2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{20}{\sin 90^\circ} = \frac{20}{1} = 20$$

$$\text{辺} b (= AC, \angle B \text{の対辺}) = 2R \sin B = 20 \times \sin 60^\circ = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

$$\text{辺} c (= AB, \angle C \text{の対辺}) = 2R \sin C = 20 \times \sin 30^\circ = 20 \times \frac{1}{2} = 10$$

$$AC = 10\sqrt{3}\text{m}, AB = 10\text{m}$$

15

2段階 (角→半径)

三角形ABCの3辺が $a = 13$ 、 $b = 7$ 、 $c = 8$ のとき、 $\angle A$ の大きさと、外接円の半径 R を求めよ。

$$\angle A = \underline{120} \text{ 度} \quad R = \underline{13\sqrt{3}/3}$$

まず余弦定理で $\angle A$ を求める。

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7^2 + 8^2 - 13^2}{2 \times 7 \times 8} = \frac{49 + 64 - 169}{112} = \frac{-56}{112} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos A = -\frac{1}{2} \text{ より } \angle A = 120^\circ。$$

次に正弦定理で外接円の半径を求める。

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{13}{\sin 120^\circ} = \frac{13}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{26}{\sqrt{3}} = \frac{26\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{よって } R = \frac{13\sqrt{3}}{3}。$$

$$\angle A = 120^\circ、R = \frac{13\sqrt{3}}{3}$$

16

2段階（最大角→半径）

三角形の3辺が 6, 10, 14 のとき、最も大きい角の大きさと、外接円の半径Rを求めよ。

最大角 = 120 度 $R = \underline{14\sqrt{3}/3}$

最も大きい角は最も長い辺14の対角。その角を θ とすると、残り2辺は6と10。

$$\cos \theta = \frac{6^2 + 10^2 - 14^2}{2 \times 6 \times 10} = \frac{36 + 100 - 196}{120} = \frac{-60}{120} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{2} \text{ より } \theta = 120^\circ.$$

$$\text{正弦定理より } 2R = \frac{14}{\sin 120^\circ} = \frac{14}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{28}{\sqrt{3}} = \frac{28\sqrt{3}}{3}, \text{ よって } R = \frac{14\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{最大角} = 120^\circ, R = \frac{14\sqrt{3}}{3}$$

17

符号だけで判定

三角形の3辺が 8, 9, 10 のとき、最も大きい角は鋭角・直角・鈍角のいずれか答えよ。（角度そのものは求めなくてよい）

鋭角

最も大きい角は最も長い辺10の対角。その角を θ とすると、残り2辺は8と9。

$$\cos \theta = \frac{8^2 + 9^2 - 10^2}{2 \times 8 \times 9} = \frac{64 + 81 - 100}{144} = \frac{45}{144}$$

$\frac{45}{144}$ はきれいな角度に対応しないが、符号がプラスなのは確認できる。 $\cos \theta > 0$ なので θ は鋭角。最も大きい角が鋭角なら、三角形全体が鋭角三角形。

鋭角（鋭角三角形）

三角形ABCにおいて、 $b : c = 1 : 2$ 、 $\angle A = 60^\circ$ であり、 $b = 5$ である。辺cと辺aの長さを求めよ。

$$c = \underline{10} \quad a = \underline{5\sqrt{3}}$$

$b : c = 1 : 2$ で $b = 5$ だから、 $c = 10$ 。

余弦定理より

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 5^2 + 10^2 - 2 \times 5 \times 10 \times \cos 60^\circ = 25 + 100 - \\ &100 \times \frac{1}{2} = 125 - 50 = 75 \end{aligned}$$

$$a = \sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3}$$

$$c = 10, a = 5\sqrt{3}$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。円に内接する四角形や、比から角を求める問題など、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

円に内接する四角形

円に内接する四角形ABCDにおいて、 $AB = 3$ 、 $BC = 5$ 、 $\angle ABC = 120^\circ$ 、 $CD = 8$ 、 $DA = 5$ とする。対角線ACの長さと、 $\angle ADC$ の大きさを求めよ。

$AC = \underline{7}$ $\angle ADC = \underline{60}$ 度

円に内接する四角形は、向かい合う角の和が 180° 。よって $\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ 。

三角形ABCで余弦定理を使い、対角線ACを求める。

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos 120^\circ = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 9 + 25 + 15 = 49$$

$$AC = \sqrt{49} = 7。$$

（確かめ）三角形ACDでも同じACが出るか検算する。 $\angle ADC = 60^\circ$ より

$$AC^2 = CD^2 + DA^2 - 2 \times CD \times DA \times \cos 60^\circ = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \frac{1}{2} = 64 + 25 - 40 = 49$$

一致した。

$$AC = 7、\angle ADC = 60^\circ$$

応2

最大角の余弦の符号判定

三角形の3辺が 4, 5, 7 のとき、この三角形は鋭角三角形・直角三角形・鈍角三角形のいずれか、余弦定理を用いて判定せよ。

鈍角

三角形の種類は、最も大きい角（最も長い辺の対角）の余弦の符号で決まる。最も長い辺は7なので、その対角を θ とする。

$$\cos \theta = \frac{4^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 4 \times 5} = \frac{16 + 25 - 49}{40} = \frac{-8}{40} = -\frac{1}{5}$$

$\cos \theta = -\frac{1}{5} < 0$ なので θ は鈍角。最も大きい角が鈍角なので、三角形全体は鈍角三角形。

鈍角三角形

応3

辺の比から角を求める

三角形の3辺の比が $a : b : c = 11 : 24 : 31$ であるとき、最も大きい角（辺 c の対角）の大きさを求めよ。

最大角 = 120 度

比がそのまま辺の長さと考えて余弦定理を使ってよい（比を k 倍しても $\cos$ の値は変わらないため）。 $a = 11$ 、 $b = 24$ 、 $c = 31$ として計算する。

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{11^2 + 24^2 - 31^2}{2 \times 11 \times 24} = \frac{121 + 576 - 961}{528} = \frac{-264}{528} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos C = -\frac{1}{2} \text{ より } C = 120^\circ.$$

最も大きい角 = 120°

船Pが地点Aを出発し、ある方向へ毎時20kmで2時間走り、地点Bに着いた。同時に船QもAを出発し、Pの進んだ方向から 60° 傾いた方向へ毎時30kmで2時間走り、地点Cに着いた。地点B、C間の距離を求めよ。

$$BC = \underline{20\sqrt{7}} \text{ km}$$

$$AB = 20 \times 2 = 40\text{km}, AC = 30 \times 2 = 60\text{km}, \angle BAC = 60^\circ.$$

三角形ABCで余弦定理を使う。

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos 60^\circ = 40^2 + 60^2 - 2 \times 40 \times \\ &60 \times \frac{1}{2} \\ &= 1600 + 3600 - 2400 = 2800 \end{aligned}$$

$$BC = \sqrt{2800} = \sqrt{400 \times 7} = 20\sqrt{7}$$

$$BC = 20\sqrt{7}\text{km} (\approx 52.9\text{km})$$

三角形の3辺が 7, 24, 25 のとき、この三角形が直角三角形であることを確かめ、外接円の半径Rを求めよ。

$$R = \underline{25/2}$$

最も長い辺25の対角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{7^2 + 24^2 - 25^2}{2 \times 7 \times 24} = \frac{49 + 576 - 625}{336} = \frac{0}{336} = 0$$

$\cos \theta = 0$ なので $\theta = 90^\circ$ 、つまり辺25を斜辺とする直角三角形である。

$$\text{正弦定理より } 2R = \frac{25}{\sin 90^\circ} = \frac{25}{1} = 25、\text{よって } R = \frac{25}{2} = 12.5。$$

直角三角形では、斜辺がそのまま外接円の直径になる（斜辺の中点が外接円の中心）ことも、この結果から確認できる。

$$\text{直角三角形であり、} R = \frac{25}{2} = 12.5$$