

三角比の相互関係

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～8）

1

$\sin \theta \rightarrow \cos \theta \cdot \tan \theta$

θ は鋭角とする。 $\sin \theta = \frac{4}{5}$ のとき、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ を求めよ。

$\cos \theta = \underline{\underline{3/5}} \quad \tan \theta = \underline{\underline{4/3}}$

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

θ は鋭角なので $\cos \theta > 0$ 、 $\cos \theta = \frac{3}{5}$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{5}、\tan \theta = \frac{4}{3}$$

2

 $\sin \theta \rightarrow \cos \theta \cdot \tan \theta$

θ は鋭角とする。 $\sin \theta = \frac{1}{2}$ のとき、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ を求めよ。

$$\cos \theta = \underline{\underline{\sqrt{3}/2}} \quad \tan \theta = \underline{\underline{\sqrt{3}/3}}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\theta \text{ は鋭角なので } \cos \theta > 0, \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\text{分母を有理化した})$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3

 $\sin \theta \rightarrow \cos \theta \cdot \tan \theta$

θ は鋭角とする。 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ を求めよ。

$$\cos \theta = \underline{\underline{1/2}} \quad \tan \theta = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\theta \text{ は鋭角なので } \cos \theta > 0, \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}, \tan \theta = \sqrt{3}$$

4

 $\cos \theta \rightarrow \sin \theta \cdot \tan \theta$

θ は鋭角とする。 $\cos \theta = \frac{4}{5}$ のとき、 $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$ を求めよ。

$$\sin \theta = \underline{\underline{3/5}} \quad \tan \theta = \underline{\underline{3/4}}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$\theta \text{ は鋭角なので } \sin \theta > 0, \sin \theta = \frac{3}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$$

$$\sin \theta = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{3}{4}$$

5

 $\cos \theta \rightarrow \sin \theta \cdot \tan \theta$

θ は鋭角とする。 $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき、 $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$ を求めよ。

$$\sin \theta = \underline{\underline{\sqrt{2}/2}} \quad \tan \theta = \underline{\underline{1}}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\theta \text{ は鋭角なので } \sin \theta > 0, \sin \theta = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \theta = 1$$

6

 $\cos \theta \rightarrow \sin \theta \cdot \tan \theta$

θ は鋭角とする。 $\cos \theta = \frac{2}{3}$ のとき、 $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$ を求めよ。

$$\sin \theta = \underline{\underline{\sqrt{5}/3}} \quad \tan \theta = \underline{\underline{\sqrt{5}/2}}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\theta \text{ は鋭角なので } \sin \theta > 0, \sin \theta = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{5}/3}{2/3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}, \tan \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

7

 $\tan \theta \rightarrow \cos \theta \cdot \sin \theta$

θ は鋭角とする。 $\tan \theta = 1$ のとき、 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ を求めよ。

$$\cos \theta = \underline{\underline{\sqrt{2}/2}} \quad \sin \theta = \underline{\underline{\sqrt{2}/2}}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + 1^2 = 2, \text{ よって } \cos^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta \text{ は鋭角なので } \cos \theta > 0, \cos \theta = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

8

 $\tan \theta \rightarrow \cos \theta \cdot \sin \theta$

θ は鋭角とする。 $\tan \theta = \sqrt{3}$ のとき、 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ を求めよ。

$$\cos \theta = \underline{1/2} \quad \sin \theta = \underline{\sqrt{3}/2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4, \text{ よって } \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$\theta \text{ は鋭角なので } \cos \theta > 0, \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}, \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

標準 (9~14) ※パターンは自分で判定

9 θ は鋭角とする。 $\sin \theta = \frac{2}{3}$ のとき、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ を求めよ。

$$\cos \theta = \underline{\sqrt{5}/3} \quad \tan \theta = \underline{2\sqrt{5}/5}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\theta \text{ は鋭角なので } \cos \theta > 0, \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{2/3}{\sqrt{5}/3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ (分母を有理化した)}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}, \tan \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

- 10 θ は鋭角とする。 $\cos \theta = \frac{1}{4}$ のとき、 $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$ を求めよ。

$$\sin \theta = \underline{\sqrt{15}/4} \quad \tan \theta = \underline{\sqrt{15}}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\theta \text{ は鋭角なので } \sin \theta > 0, \sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{15}/4}{1/4} = \sqrt{15}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}, \tan \theta = \sqrt{15}$$

- 11 θ は鋭角とする。 $\tan \theta = 3$ のとき、 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ を求めよ。

$$\cos \theta = \underline{\sqrt{10}/10} \quad \sin \theta = \underline{3\sqrt{10}/10}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + 3^2 = 1 + 9 = 10, \text{ よって } \cos^2 \theta = \frac{1}{10}$$

$$\theta \text{ は鋭角なので } \cos \theta > 0, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \text{ (分母を有理化した)}$$

$$\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = 3 \times \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{10}}{10}, \sin \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

- 12 θ は鋭角とする。 $\tan \theta = \frac{1}{2}$ のとき、 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ を求めよ。

$$\cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \text{ よって } \cos^2 \theta = \frac{4}{5}$$

$$\theta \text{ は鋭角なので } \cos \theta > 0, \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ (分母を有理化した)}$$

$$\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

- 13 θ は鋭角とする。 $\sin \theta = \frac{5}{13}$ のとき、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ を求めよ。

$$\cos \theta = \frac{12}{13} \quad \tan \theta = \frac{5}{12}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

$$\theta \text{ は鋭角なので } \cos \theta > 0, \cos \theta = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

$$\tan \theta = \frac{5/13}{12/13} = \frac{5}{12}$$

$$\cos \theta = \frac{12}{13}, \tan \theta = \frac{5}{12}$$

14 θ は鋭角とする。 $\cos \theta = \frac{7}{25}$ のとき、 $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$ を求めよ。

$$\sin \theta = \underline{24/25} \quad \tan \theta = \underline{24/7}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2 = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}$$

$$\theta \text{ は鋭角なので } \sin \theta > 0, \sin \theta = \sqrt{\frac{576}{625}} = \frac{24}{25}$$

$$\tan \theta = \frac{24/25}{7/25} = \frac{24}{7}$$

$$\sin \theta = \frac{24}{25}, \tan \theta = \frac{24}{7}$$

挑戦 (15~18)

15

$\tan \theta$ が根号を含む

θ は鋭角とする。 $\tan \theta = 2\sqrt{2}$ のとき、 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ を求めよ。

$$\cos \theta = \underline{1/3} \quad \sin \theta = \underline{2\sqrt{2}/3}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + (2\sqrt{2})^2 = 1 + 8 = 9, \text{ よって } \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$\theta \text{ は鋭角なので } \cos \theta > 0, \cos \theta = \frac{1}{3}$$

$$\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{検算: } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1 \text{ となり正しい。}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{3}, \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

θ は鋭角とする。cos $\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ のとき、sin θ 、tan θ を求めよ。

$$\sin \theta = \underline{2\sqrt{5}/5} \quad \tan \theta = \underline{2}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \right)^2 = 1 - \frac{5}{25} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

θ は鋭角なので sin $\theta > 0$ 、sin $\theta = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ (分母を有理化した)

$$\tan \theta = \frac{2\sqrt{5}/5}{\sqrt{5}/5} = 2$$

この三角形はSTEP 3の例題1 (tan $\theta = 2$) と同じ直角三角形。cos θ を先に与えるか tan θ を先に与えるかが違うだけだと分かる。

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \tan \theta = 2$$

θ は鋭角とする。tan $\theta = \frac{1}{3}$ のとき、sin θ cos θ の値を求めよ。

$$\sin \theta \cos \theta = \underline{3/10}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}, \text{ よって } \cos^2 \theta = \frac{9}{10}$$

θ は鋭角なので cos $\theta > 0$ 、cos $\theta = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ (分母を有理化した)

$$\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{\sqrt{10}}{10} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{3 \times 10}{100} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{3}{10}$$

θ は鋭角とする。 $\cos \theta = \frac{3}{5}$ のとき、 $1 - 2 \sin^2 \theta$ の値を求めよ。

$$1 - 2 \sin^2 \theta = \underline{-7/25}$$

$$\text{相互関係より } \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

（ $\sin \theta$ 自体を求める必要はなく、 $\sin^2 \theta$ の値が分かれば十分）

$$1 - 2 \sin^2 \theta = 1 - 2 \times \frac{16}{25} = 1 - \frac{32}{25} = \frac{25}{25} - \frac{32}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$1 - 2 \sin^2 \theta = -\frac{7}{25}$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。 $\sin \theta \cdot \cos \theta$ の和や積を使いこなす対称式の扱いに挑戦しよう。

応1

和から積を求める（対称式）

θ は鋭角とする。 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$ のとき、 $\sin \theta \cos \theta$ の値を求めよ。

$$\sin \theta \cos \theta = \underline{\underline{1/4}}$$

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$ の両辺を2乗する。

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

左辺の $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ は相互関係より 1 なので、

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{2}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

θ は鋭角とする。 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$ のとき、 $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ の値を求めよ。

（前問の $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$ を利用してよい）

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \underline{\underline{3\sqrt{6}/8}}$$

$(\sin \theta + \cos \theta)^3$ を展開してみる ($(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ の要領で計算する)。

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta)^3 &= \sin^3 \theta + 3\sin^2 \theta \cos \theta + 3\sin \theta \cos^2 \theta + \cos^3 \theta \\ &= \sin^3 \theta + \cos^3 \theta + 3\sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta) \end{aligned}$$

（中央の2項を $3\sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)$ の形にまとめた）

よって

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3\sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)$$

前問より $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 、 $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$ なので、代入すると

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^3 - 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^3 = \frac{6\sqrt{6}}{8} = \frac{3\sqrt{6}}{4}, \quad 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$$

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \frac{3\sqrt{6}}{4} - \frac{3\sqrt{6}}{8} = \frac{6\sqrt{6}}{8} - \frac{3\sqrt{6}}{8} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$$

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{6}}{8}}}$$

θ は鋭角とする。 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3}$ のとき、 $\sin \theta \cos \theta$ の値を求めよ。

$\sin \theta \cos \theta = \underline{\underline{4/9}}$

$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3}$ の両辺を2乗する。

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

左辺の $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ は相互関係より 1 なので、

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

($\sin \theta - \cos \theta > 0$ なので $\sin \theta > \cos \theta$ 、つまり θ は 45° より大きい鋭角だと分かるが、積の値を求めるだけならここまでの計算で十分)

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

θ は鋭角とする。 $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3}$ のとき、 $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$ の値を求めよ。

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \underline{\underline{3}}$$

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 、 $\frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ なので、通分してまとめる。

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

分子の $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ は相互関係より 1 なので、

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$$

$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3}$ を代入すると、

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{1/3} = 3$$

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = 3$$

ある坂道の傾斜角を θ とする。この坂道に沿って 100m 進むと、水平方向には 80 m 進んだ。このとき、 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$ をそれぞれ求めよ。

$$\cos \theta = \underline{\underline{4/5}} \quad \sin \theta = \underline{\underline{3/5}} \quad \tan \theta = \underline{\underline{3/4}}$$

坂道に沿った距離が斜辺、水平方向の距離が隣辺にあたる直角三角形ができる。斜辺 100m、隣辺 80m なので、三平方の定理から対辺（高さ）を求める。

高さを h とすると $h^2 = 100^2 - 80^2 = 10000 - 6400 = 3600$ 、 $h > 0$ より $h = 60$ m

定義通りに比を作る。

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\text{隣辺}}{\text{斜辺}} = \frac{80}{100} = \frac{4}{5} \\ \sin \theta &= \frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} \\ \tan \theta &= \frac{\text{対辺}}{\text{隣辺}} = \frac{60}{80} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

検算： $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$ となり正しい。

$$\cos \theta = \frac{4}{5}, \sin \theta = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{3}{4}$$