

図形と計量 まとめ

解答（全27問）

氏名 _____

得点 _____ / 27点

DRILL

まとめテスト（標準）

基本（1～15）

1

三角比の定義

直角三角形で、隣辺6・対辺8・斜辺10のとき、 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ を求めよ。

$$\sin \theta = \underline{8/10} \quad \cos \theta = \underline{6/10} \quad \tan \theta = \underline{8/6}$$

θ から見て、隣辺6・対辺8・斜辺10。定義にそのまま当てはめる。

$$\sin \theta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{4}{3}$$

2

有名角の値

次の値を求めよ。 $\sin 60^\circ$ 、 $\tan 30^\circ$

$$\sin 60^\circ = \underline{\sqrt{3}/2} \quad \tan 30^\circ = \underline{\sqrt{3}/3}$$

有名角の一覧表より、そのまま読み取る。

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3

境界の角の値

次の値を求めよ。 $\cos 0^\circ$ 、 $\sin 90^\circ$

$$\cos 0^\circ = \underline{1} \quad \sin 90^\circ = \underline{1}$$

$\theta = 0^\circ$ では点 $P(r, 0)$ なので $\cos 0^\circ = \frac{r}{r} = 1$ 。
 $\theta = 90^\circ$ では点 $P(0, r)$ なので $\sin 90^\circ = \frac{r}{r} = 1$ 。

$$\cos 0^\circ = 1, \sin 90^\circ = 1$$

4

相互関係： $\sin \theta$ から

θ は鋭角とする。 $\sin \theta = \frac{8}{17}$ のとき、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ を求めよ。

$$\cos \theta = \underline{15/17} \quad \tan \theta = \underline{8/15}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{8}{17}\right)^2 = 1 - \frac{64}{289} = \frac{225}{289}$$

θ は鋭角なので $\cos \theta > 0$ 、 $\cos \theta = \frac{15}{17}$

$$\tan \theta = \frac{8/17}{15/17} = \frac{8}{15}$$

$$\cos \theta = \frac{15}{17}, \tan \theta = \frac{8}{15}$$

5

相互関係： $\cos \theta$ から

θ は鋭角とする。 $\cos \theta = \frac{5}{13}$ のとき、 $\sin \theta$, $\tan \theta$ を求めよ。

$$\sin \theta = \underline{\underline{12/13}} \quad \tan \theta = \underline{\underline{12/5}}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

$$\theta \text{は鋭角なので} \sin \theta > 0, \sin \theta = \frac{12}{13}$$

$$\tan \theta = \frac{12/13}{5/13} = \frac{12}{5}$$

$$\sin \theta = \frac{12}{13}, \tan \theta = \frac{12}{5}$$

6

相互関係： $\tan \theta$ から

θ は鋭角とする。 $\tan \theta = \frac{4}{3}$ のとき、 $\cos \theta$, $\sin \theta$ を求めよ。

$$\cos \theta = \underline{\underline{3/5}} \quad \sin \theta = \underline{\underline{4/5}}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9}, \text{ よって } \cos^2 \theta = \frac{9}{25}$$

$$\theta \text{は鋭角なので} \cos \theta > 0, \cos \theta = \frac{3}{5}$$

$$\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = \frac{4}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{5}, \sin \theta = \frac{4}{5}$$

7

鈍角の有名角

次の値を求めよ。 $\sin 135^\circ$ 、 $\cos 150^\circ$

$$\sin 135^\circ = \underline{\sqrt{2}/2} \quad \cos 150^\circ = \underline{-\sqrt{3}/2}$$

$135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$ 。公式 $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ より $\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。
 $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$ 。公式 $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ より $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

$$\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

8

鈍角の有名角

$\tan 120^\circ$ の値を求めよ。

値 $\underline{-\sqrt{3}}$

$120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$ 。公式 $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$ より $\tan 120^\circ = -\tan 60^\circ$ 。

$$\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

9

 $90^\circ - \theta$ の公式

$\sin \theta = \frac{5}{6}$ のとき、 $\cos(90^\circ - \theta)$ の値を求めよ。

値 $\underline{5/6}$

公式 $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$ より、そのまま同じ値になる。

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{5}{6}$$

10

180°-θの公式

$\cos \theta = \frac{1}{6}$ のとき、 $\cos(180^\circ - \theta)$ の値を求めよ。

値 -1/6

公式 $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ に $\cos \theta = \frac{1}{6}$ を代入する。

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\frac{1}{6}$$

11

三角方程式

$\cos \theta = -\frac{1}{2}$ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) を満たす θ を求めよ。

$\theta =$ 120

$\cos \theta$ が負なので θ は鈍角。有名角の表より $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ 。

$\cos \theta$ は 0° から 180° まで単調に減少するので、他に解はない。

$$\theta = 120^\circ$$

12

正弦定理・外接円の半径

三角形ABCにおいて、 $\angle A = 60^\circ$ 、 $a = 9$ のとき、外接円の半径Rを求めよ。

$R =$ $3\sqrt{3}$

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{9}{\sin 60^\circ} = \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{18}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$$

$$R = 3\sqrt{3}$$

$$R = 3\sqrt{3}$$

13

余弦定理・辺を求める

三角形ABCにおいて、 $b = 6$ 、 $c = 9$ 、 $\angle A = 60^\circ$ のとき、辺aの長さを求めよ。

$$a = \underline{3\sqrt{7}}$$

$$a^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \times 6 \times 9 \times \cos 60^\circ = 36 + 81 - 108 \times \frac{1}{2} = 117 - 54 = 63$$

$$a = \sqrt{63} = \sqrt{9 \times 7} = 3\sqrt{7}$$

$$a = 3\sqrt{7}$$

14

余弦定理・角の判定

三角形の3辺が 6, 7, 11 のとき、辺11の対角の余弦の値を求め、この三角形が鋭角三角形・鈍角三角形のいずれか判定せよ。

$$\cos \theta = \underline{-3/7} \quad \text{判定} \quad \underline{\text{鈍角}}$$

辺11の対角を θ とすると、残り2辺は6と7。

$$\cos \theta = \frac{6^2 + 7^2 - 11^2}{2 \times 6 \times 7} = \frac{36 + 49 - 121}{84} = \frac{-36}{84} = -\frac{3}{7}$$

$\cos \theta = -\frac{3}{7} < 0$ なので θ は鈍角。最も大きい角が鈍角なので、三角形全体は鈍角三角形。

$$\cos \theta = -\frac{3}{7}, \text{鈍角三角形}$$

15

面積公式

三角形ABCにおいて、 $a = 8$ 、 $b = 9$ 、 $\angle C = 30^\circ$ のとき、面積Sを求めよ。

$$S = \underline{18}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 8 \times 9 \times \sin 30^\circ = 36 \times \frac{1}{2} = 18$$

$$S = 18$$

16

2段階 (角→半径)

三角形ABCの3辺が $a = 7$ 、 $b = 5$ 、 $c = 8$ のとき、 $\angle A$ の大きさと外接円の半径 R を求めよ。

$$\angle A = \underline{60} \text{ 度} \quad R = \underline{7\sqrt{3}/3}$$

まず余弦定理で $\angle A$ を求める。

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 8} = \frac{25 + 64 - 49}{80} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$$

$$\cos A = \frac{1}{2} \text{ より } \angle A = 60^\circ。$$

次に正弦定理で外接円の半径を求める。

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{7}{\sin 60^\circ} = \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{14}{\sqrt{3}} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{よって } R = \frac{7\sqrt{3}}{3}。$$

$$\angle A = 60^\circ、R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

ある坂道の傾斜角を θ とする。この坂道に沿って25m進むと、水平方向には24m進んだ。 $\cos \theta$, $\sin \theta$, $\tan \theta$ をそれぞれ求めよ。

$$\cos \theta = \underline{\underline{24/25}} \quad \sin \theta = \underline{\underline{7/25}} \quad \tan \theta = \underline{\underline{7/24}}$$

坂道に沿った距離が斜辺、水平方向の距離が隣辺にあたる直角三角形ができる。斜辺25m、隣辺24mなので、三平方の定理から対辺（高さ）を求める。

高さを h とすると $h^2 = 25^2 - 24^2 = 625 - 576 = 49$ 、 $h > 0$ より $h = 7$ m

定義通りに比を作る。

$$\cos \theta = \frac{\text{隣辺}}{\text{斜辺}} = \frac{24}{25}$$

$$\sin \theta = \frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}} = \frac{7}{25}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{対辺}}{\text{隣辺}} = \frac{7}{24}$$

検算： $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \frac{49}{625} + \frac{576}{625} = 1$ となり正しい。

$$\cos \theta = \frac{24}{25}, \sin \theta = \frac{7}{25}, \tan \theta = \frac{7}{24}$$

θ は $90^\circ < \theta < 180^\circ$ の角とする。 $\tan \theta = -2$ のとき、 $\sin \theta$, $\cos \theta$ を求めよ。

$$\sin \theta = \underline{\underline{2\sqrt{5}/5}} \quad \cos \theta = \underline{\underline{-\sqrt{5}/5}}$$

相互関係 $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ より

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + (-2)^2 = 1 + 4 = 5、よって \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ (鈍角) なので $\cos \theta < 0$ 。

$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \quad (\text{分母を有理化した})$$

$$\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = (-2) \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

($\sin \theta$ は $0^\circ \sim 180^\circ$ の全範囲で正になるので、この結果は符号としても正しい)

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

三角形ABCにおいて、 $b = 7$ 、 $\angle C = 45^\circ$ 、面積 $S = 14\sqrt{2}$ のとき、辺 a の長さを求めよ。

$$a = \underline{\underline{8}}$$

$S = \frac{1}{2}ab \sin C$ に代入する。

$$14\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times a \times 7 \times \sin 45^\circ = \frac{7a}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7a\sqrt{2}}{4}$$

両辺に $\frac{4}{7\sqrt{2}}$ を掛けると

$$a = 14\sqrt{2} \times \frac{4}{7\sqrt{2}} = \frac{14 \times 4}{7} = 8$$

$$a = 8$$

三角形の3辺が **7, 8, 13** のとき、面積 S と内接円の半径 r を求めよ。

$$S = \underline{14\sqrt{3}} \quad r = \underline{\sqrt{3}}$$

辺7と辺8にはさまれる角（辺13の対角）を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{7^2 + 8^2 - 13^2}{2 \times 7 \times 8} = \frac{49 + 64 - 169}{112} = \frac{-56}{112} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{2} \text{より} \theta = 120^\circ, \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}。$$

$$S = \frac{1}{2} \times 7 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 28 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$$

周の長さは $7 + 8 + 13 = 28$ なので

$$r = \frac{2S}{a + b + c} = \frac{2 \times 14\sqrt{3}}{28} = \frac{28\sqrt{3}}{28} = \sqrt{3}$$

$$S = 14\sqrt{3}, r = \sqrt{3}$$

縦**5**、横**12**の直方体があり、対角線の長さが**15**であるとき、高さ c を求めよ（ $c > 0$ ）。

$$c = \underline{2\sqrt{14}}$$

$$15^2 = 5^2 + 12^2 + c^2$$

$$225 = 25 + 144 + c^2 = 169 + c^2$$

$$c^2 = 56$$

$$c > 0 \text{より} c = \sqrt{56} = \sqrt{4 \times 14} = 2\sqrt{14}$$

$$c = 2\sqrt{14}$$

円に内接する四角形ABCDにおいて、 $AB = 7$ 、 $BC = 8$ 、 $\angle ABC = 120^\circ$ 、 $CD = 15$ 、 $DA = 8$ とする。対角線ACの長さと、四角形ABCDの面積を求めよ。

$AC = \underline{13}$ 面積 $\underline{44\sqrt{3}}$

円に内接する四角形は、向かい合う角の和が 180° 。よって $\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ 。

三角形ABCで余弦定理を使い、対角線ACを求める。

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos 120^\circ = 7^2 + 8^2 - 2 \times 7 \times 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 49 + 64 + 56 = 169$$

$$AC = \sqrt{169} = 13.$$

（確かめ）三角形ACDでも同じACが出るか検算する。 $\angle ADC = 60^\circ$ より

$$AC^2 = CD^2 + DA^2 - 2 \times CD \times DA \times \cos 60^\circ = 15^2 + 8^2 - 2 \times 15 \times 8 \times \frac{1}{2} = 225 + 64 - 120 = 169$$

一致した。

次に面積。三角形ABCの面積：

$$S_1 = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 7 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 28 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$$

三角形ACDの面積：

$$S_2 = \frac{1}{2} \times CD \times DA \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 15 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 60 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$$

$$\text{四角形の面積は } S_1 + S_2 = 14\sqrt{3} + 30\sqrt{3} = 44\sqrt{3}$$

$$AC = 13、\text{四角形ABCDの面積} = 44\sqrt{3}$$

三角形ABCの内角 A, B, C について $A + B + C = 180^\circ$ が成り立つ。 $B + C = 135^\circ$ のとき、 $\cos A$ と $\sin A$ の値を求めよ。

$$\cos A = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}} \quad \sin A = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

$$A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ.$$

公式 $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ を $\theta = B + C$ として使うと $\cos A = \cos(180^\circ - (B + C)) = -\cos(B + C) = -\cos 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ となることも確認できる（結果は直接 $A = 45^\circ$ から求めても同じ）。

$$\text{有名角の表より} \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

三角形の3辺の比が $a : b : c = 5 : 6 : 7$ であるとき、最も大きい角（辺 c の対角）の余弦の値を求めよ。

$$\cos C = \underline{\underline{\frac{1}{5}}}$$

比がそのまま辺の長さと考えて余弦定理を使ってよい（比を k 倍しても $\cos$ の値は変わらないため）。 $a = 5, b = 6, c = 7$ として計算する。

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 6} = \frac{25 + 36 - 49}{60} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

$$\cos C = \frac{1}{5}$$

三角形ABCにおいて、 $b = 8$ 、 $c = 3$ 、 $\angle A = 60^\circ$ である。辺 a の長さ、面積 S 、外接円の半径 R をすべて求めよ。

$$a = \underline{7} \quad S = \underline{6\sqrt{3}} \quad R = \underline{7\sqrt{3}/3}$$

まず余弦定理で辺 a を求める。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 8^2 + 3^2 - 2 \times 8 \times 3 \times \cos 60^\circ = 64 + 9 - 48 \times \frac{1}{2} = 73 - 24 = 49$$

$$a > 0 \text{ より } a = \sqrt{49} = 7。$$

次に面積公式を使う。

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 \times \sin 60^\circ = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

最後に正弦定理で外接円の半径を求める。

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{7}{\sin 60^\circ} = \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{14}{\sqrt{3}} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{よって } R = \frac{7\sqrt{3}}{3}。$$

このように、1組の「2辺とその間の角」から、辺・面積・外接円の半径のすべてが芋づる式に求まる。これがこの章で学んだ計量の道具（余弦定理・面積公式・正弦定理）を組み合わせる総仕上げの型である。

$$a = 7, S = 6\sqrt{3}, R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1 三角比は最初、直角三角形の辺の比として $0^\circ < \theta < 90^\circ$ の範囲でしか定義されていなかった。座標を用いた定義に拡張することで、なぜ鈍角に対しても三角比が矛盾なく（それまでの鋭角の定義と食い違うことなく）定義できるようになるのかを、鋭角の場合との関係に触れながら説明せよ。

座標による定義では、原点 O を中心とする半径 r の円周上の点 $P(x, y)$ ($y \geq 0$) を用いて、 x 軸の正の方向から測った角 θ に対して $\sin \theta = \frac{y}{r}$ 、 $\cos \theta = \frac{x}{r}$ 、 $\tan \theta = \frac{y}{x}$ と定める。 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ はこの定義により $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のすべての角に対して意味をもつ（ $\tan \theta$ だけは $\theta = 90^\circ$ のとき $x = 0$ となり分母が0になるため定義できない）。

θ が鋭角 ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) のときを考えると、点 P から x 軸へ垂線をおろした足を H とすると、直角三角形 OHP ができ、 $OH = x$ が隣辺、 $HP = y$ が対辺、 $OP = r$ が斜辺にあたる。このとき $\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}$ 、 $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{隣辺}}{\text{斜辺}}$ となり、これはもとの直角三角形による定義とぴったり一致する。つまり座標による定義は、鋭角の範囲では以前の定義を「書き換えた」ものではなく、まったく同じ値を別の方法で表しただけである。

θ が鈍角 ($90^\circ < \theta < 180^\circ$) になると、点 P は y 軸の左側 ($x < 0$) に移る。このとき直角三角形の中に θ 自身は現れない（ θ は鈍角なので直角三角形の内角にはなれない）が、 x 座標が負になるという事実だけを使えば、 $\cos \theta = \frac{x}{r}$ は自動的に負の値になる。 y は0以上のままなので $\sin \theta$ はつねに0以上である。このように、座標による定義は「直角三角形の中に角が実際に存在するかどうか」に頼らず、点の座標という数値だけで三角比を決めるため、鋭角でも鈍角でも同じ1つの式でつねに矛盾なく値を定められる。

座標による定義は、鋭角の範囲ではもとの直角三角形の定義と一致し、鈍角の範囲では点の x 座標が負になるという事実だけから符号が自動的に決まるため、鋭角・鈍角を通じて矛盾なく三角比を定義できる。

記2 三角形の辺や角、面積を求めるとき、この章では正弦定理・余弦定理・面積公式という3つの道具を学んだ。それぞれ「どんな情報（辺・角の組み合わせ）が与えられていれば使えるか」を整理して説明せよ。

正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ は、辺とその対角（向かい合う角）がペアになって登場する式である。これを使うには、少なくとも1組の「辺とその対角」がすでにわかっている必要がある。したがって、2つの角と1つの辺がわかっている場合（角の和が 180° であることから残りの角もわかる）や、1つの角とその対辺、そしてもう1つの辺がわかっている場合に使える。

余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ は、2辺とその間の角、または3辺すべてがわかっているときに使う。「2辺とその間の角」が与えられた状況では、分かっている角の対辺（挟まれていない残りの1辺）がまだわからないため、正弦定理の「辺とその対角」の組が1つも作れない。このときは余弦定理を使うしかない。また3辺だけがわかっている場合も、辺と角のペアがまだ1つも定まっていないので、まず余弦定理を変形した $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ でどれか1つの角を求める必要がある。

面積公式 $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ は、2辺とその間の角がわかっているならば、高さを別に計算しなくてもそのまま使える。3辺だけしかわかっていないときは、面積公式をいきなり使うことはできず、先に余弦定理で角のどれか1つの余弦を求め、 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C}$ ($0^\circ < C < 180^\circ$ の範囲では $\sin C$ は必ず正) で $\sin$ の値に変換してから、面積公式に代入するという2段階の手順になる。

このように3つの道具は「辺と角の組み合わせのどれが与えられているか」によって使い分けが決まっており、迷ったときはまず与えられている情報を辺・角のペアとして整理することが、正しい道具を選ぶ第一歩になる。

正弦定理は「辺とその対角の組」が1つ分かっているときに使う。余弦定理は2辺とその間の角、または3辺だけのときに使う。面積公式は2辺とその間の角があれば直接使えるが、3辺だけのときは先に余弦定理で角を求める2段階になる。

EXAM

共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 8分/配点 20点

花子さんの学校では、実習で川の両岸に立つ2地点から対岸の目標物までの距離を求める測量を行うことになった。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「対岸の点をA、こちら側の岸にある2地点をB、Cとしよう。 $BC = 10\text{m}$ 、 $\angle ABC = 120^\circ$ 、 $\angle ACB = 30^\circ$ で観測できたよ。」

花子「2つの角がわかっているから、正弦定理が使えるそうですね。」

- (1) $\angle BAC$ の大きさを求めよ。また、正弦定理を用いて外接円の直径 $2R$ を求めよ。 $\angle BAC = \boxed{\text{ア}}\boxed{\text{イ}}^\circ$ 、 $2R = \boxed{\text{ウ}}\boxed{\text{エ}}\text{m}$ である。

アイ 30 ウエ 20

三角形の内角の和より

$$\angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

正弦定理より、 $BC = a$ ($\angle A$ の対辺) を使って

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{10}{\sin 30^\circ} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20$$

$$\angle BAC = 30^\circ, 2R = 20\text{m}$$

- (2) 正弦定理を使って、辺AB、辺ACの長さを求めよ。 $AB = \boxed{\text{オ}}\boxed{\text{カ}}\text{m}$ 、 $AC = \boxed{\text{キ}}\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}\text{m}$ である。

オカ 10 キク 10 ケ 3

(1)で求めた $2R = 20$ を使う。

$$AB (= c, \angle C \text{の対辺}) = 2R \sin C = 20 \times \sin 30^\circ = 20 \times \frac{1}{2} = 10$$

$$AC (= b, \angle B \text{の対辺}) = 2R \sin B = 20 \times \sin 120^\circ = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

($\angle A = \angle C = 30^\circ$ なので、この三角形は $AB = BC = 10$ の二等辺三角形になっていることも確認できる。)

$$AB = 10\text{m}, AC = 10\sqrt{3}\text{m}$$

(3)

太郎「これで三角形ABCの3辺と角がすべて求まりましたね。面積も求めてみよう。」

三角形ABCの面積 S と、点Aから直線BCへおろした垂線の長さ h を求めよ。

$$S = \boxed{\text{コ}} \boxed{\text{サ}} \sqrt{\boxed{\text{シ}}} \text{m}^2, h = \boxed{\text{ス}} \sqrt{\boxed{\text{セ}}} \text{m} \text{ である。}$$

$$\text{コサ} \quad \underline{25} \quad \text{シ} \quad \underline{3} \quad \text{ス} \quad \underline{5} \quad \text{セ} \quad \underline{3}$$

面積公式 $S = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin(\angle ABC)$ を使う。

$$S = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \sin 120^\circ = 50 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$$

垂線の長さ h は、面積を「底辺×高さ÷2」の形で表した式から逆算する。底辺をBC（長さ10）とすると

$$S = \frac{1}{2} \times BC \times h$$

$$25\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 10 \times h = 5h$$

$$h = 5\sqrt{3}$$

$$S = 25\sqrt{3}\text{m}^2, h = 5\sqrt{3}\text{m}$$

太郎さんと花子さんは、3辺の長さがわかっている三角形について、角の種類や面積を調べている。

太郎「3辺が5、6、9の三角形を考えてみよう。」

花子「まず、いちばん大きい角がどんな角か調べたいね。」

(1)

最も大きい角（辺9の対角）を C とする。 $\cos C = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である（アは符号もつけて入力）。この三角形は鋭角三角形・鈍角三角形のいずれか、判定せよ。

ア -1 イ 3 判定 鈍角

辺9の対角を C とすると、残り2辺は5と6。

$$\cos C = \frac{5^2 + 6^2 - 9^2}{2 \times 5 \times 6} = \frac{25 + 36 - 81}{60} = \frac{-20}{60} = -\frac{1}{3}$$

$\cos C = -\frac{1}{3} < 0$ なので C は鈍角。最も大きい角が鈍角なので、三角形全体は鈍角三角形。

$$\cos C = -\frac{1}{3}, \text{ 鈍角三角形}$$

(2)

相互関係を用いて $\sin C$ の値を求めよ。 $\sin C = \frac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。これを用

いて面積 S を求めると、 $S = \boxed{\text{カ}}\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ となる。

ウ 2 エ 2 オ 3 カキ 10 ク 2

相互関係 $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$ より

$$\sin^2 C = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$0^\circ < C < 180^\circ$ の範囲では $\sin C$ は必ず正なので

$$\sin C = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{に整理した})$$

面積公式 $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ ($a = 5, b = 6$) に代入する。

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 15 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 10\sqrt{2}$$

$$\sin C = \frac{2\sqrt{2}}{3}, S = 10\sqrt{2}$$

(3)

花子「面積が求まったから、内接円の半径も出せるね。」

この三角形の内接円の半径 r を求めよ。 $r = \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

ケ 2

周の長さは $5 + 6 + 9 = 20$ 。(2)で求めた $S = 10\sqrt{2}$ を使う。

$$r = \frac{2S}{a + b + c} = \frac{2 \times 10\sqrt{2}}{20} = \frac{20\sqrt{2}}{20} = \sqrt{2}$$

$$r = \sqrt{2}$$