

逆・裏・対偶と証明

解答（全20問）

氏名 _____

得点 _____ / 20点

DRILL

練習問題（全15問）

基本（1～5）

1

対偶の性質

命題 $p \Rightarrow q$ の逆・裏・対偶のうち、必ず元の命題と真偽が一致するものはどれか。

答え 対偶

元の命題「 $p \Rightarrow q$ 」と対偶「 $\neg q \Rightarrow \neg p$ 」は、言っている内容が論理的に同じなので、真偽が必ず一致する。逆・裏は一致するとは限らない。

対偶

2

逆の真偽+反例

命題「自然数 n について、 n が4の倍数ならば n は2の倍数である」の逆の真偽を答えよ。また、その反例を（自然数の中でいちばん小さいもの）1つ答えよ。

逆の真偽 偽 反例 $n =$ 2

逆：「 n が2の倍数ならば n は4の倍数である」

$n = 2$ は2の倍数だが4の倍数ではない。

偽（反例 $n = 2$ ）

3

逆の真偽+反例

命題「自然数 n について、 n が9の倍数ならば n は3の倍数である」の逆の真偽を答えよ。また、いちばん小さい反例を1つ答えよ。

逆の真偽 偽 反例 $n =$ 3

逆：「 n が3の倍数ならば n は9の倍数である」

$n = 3$ は3の倍数だが9の倍数ではない。

偽（反例 $n = 3$ ）

4

逆の真偽+反例（負の数）

命題「実数 x について、 $x = 3$ ならば $x^2 = 9$ である」の逆の真偽を答えよ。また、負の数の反例を1つ答えよ。

逆の真偽 偽 反例 $x =$ -3

逆：「 $x^2 = 9$ ならば $x = 3$ である」

$x = -3$ のときも $x^2 = 9$ になるが、 $x = 3$ ではない。

偽（反例 $x = -3$ ）

5

逆が真になる例

命題「実数 x について、 $x = 0$ ならば $x^2 = 0$ である」の逆の真偽を答えよ。

逆の真偽 真

逆：「 $x^2 = 0$ ならば $x = 0$ である」

$x^2 = 0$ になる実数は $x = 0$ しかないので、逆も成り立つ。逆がつねに偽になるとは限らない、という例。

真

標準 (6~10) ※逆だけでなく裏・対偶も出てくる

6

命題「整数 n について、 n が偶数ならば n^2 は偶数である」の逆の真偽を答えよ。
(STEP2の証明で確認した事実を思い出そう)

逆の真偽 真

逆：「 n^2 が偶数ならば n は偶数である」

これはSTEP2の例題で対偶を使って証明した命題そのものであり、真であることが分かっている。

真

7

命題「実数 x について、 $x > 3$ ならば $x > 0$ である」の逆の真偽を答えよ。また、1桁の自然数の中でいちばん小さい反例を1つ答えよ。

逆の真偽 偽 反例 $x =$ 1

逆：「 $x > 0$ ならば $x > 3$ である」

$x = 1$ は0より大きいが3より大きくはない。

偽 (反例 $x = 1$)

- 8 命題「四角形ABCDについて、ABCDが正方形ならばABCDは長方形である」の逆の真偽を答えよ。

逆の真偽 偽

逆：「ABCDが長方形ならばABCDは正方形である」

たとえば縦2、横3の長方形は正方形ではない。長方形は必ずしも正方形とは限らない。

偽

- 9 対偶の真偽（性質の利用）

命題「実数 x について、 $x^2 = 1$ ならば $x = 1$ である」の対偶の真偽を答えよ。（元の命題自体の真偽から考えよう）

対偶の真偽 偽

まず元の命題を確認する： $x = -1$ のときも $x^2 = 1$ になるが $x = 1$ ではないので、元の命題は偽。

対偶は元の命題と必ず真偽が一致するので、対偶も偽。

偽

- 10 裏の真偽

命題「整数 n について、 n^2 が奇数ならば n は奇数である」の裏（ $\neg p \Rightarrow \neg q$ の形）の真偽を答えよ。

裏の真偽 真

裏：「 n^2 が偶数ならば n は偶数である」

これはSTEP2の例題で証明した命題そのものであり、真である。（逆・裏は元の命題と必ず一致するわけではないが、この例ではたまたま真になっている）

真

11

対偶証明

n を整数とする。「 n^2 が奇数ならば n は奇数である」を証明せよ。

対偶「 n が偶数ならば n^2 は偶数である」を証明する。

n が偶数のとき、ある整数 k を使って $n = 2k$ と書ける。

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

$2k^2$ は整数だから、 n^2 は「 $2 \times$ 整数」の形、すなわち偶数である。

よって対偶は真。対偶が真であることと元の命題が真であることは同値だから、

「 n^2 が奇数ならば n は奇数である」は真

12

対偶証明 (場合分け)

n を整数とする。「 n^2 が3の倍数ならば n は3の倍数である」を証明せよ。

対偶「 n が3の倍数でないならば n^2 は3の倍数でない」を証明する。

n が3の倍数でないとき、ある整数 k を使って $n = 3k + 1$ または $n = 3k + 2$ のいずれかの形で書ける。

(1) $n = 3k + 1$ のとき

$$n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$$

$3k^2 + 2k$ は整数だから、 n^2 は「 $3 \times$ 整数 $+ 1$ 」の形、すなわち3の倍数ではない。

(2) $n = 3k + 2$ のとき

$$n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$$

$3k^2 + 4k + 1$ は整数だから、この場合も n^2 は「 $3 \times$ 整数 $+ 1$ 」の形、すなわち3の倍数ではない。

(1) (2) のどちらの場合も n^2 は3の倍数にならないので、対偶は真。よって、

「 n^2 が3の倍数ならば n は3の倍数である」は真

実数 a, b について、「 $a + b$ が無理数ならば、 a と b の少なくとも一方は無理数である」を証明せよ。

結論を否定して、 a も b もともに有理数であると仮定する。

有理数どうしの和は有理数になるので、 $a + b$ は有理数となる。

しかしこれは「 $a + b$ が無理数である」という仮定に矛盾する。

矛盾が生じたのは、「 a, b がともに有理数である」と仮定したせいである。したがって、

「 $a + b$ が無理数ならば、 a と b の少なくとも一方は無理数である」は真

自然数の中に、最大のものは存在しないことを証明せよ。

結論を否定して、**最大の自然数 N が存在すると仮定する。**

N は自然数だから、 $N + 1$ も自然数である。ところが $N + 1 > N$ なので、 $N + 1$ は N より大きい自然数ということになる。

これは「 N が最大の自然数である」という仮定に矛盾する。

矛盾が生じたのは、「最大の自然数が存在する」と仮定したせいである。したがって、

自然数の中に、最大のものは存在しない

すべての実数 x について、 $x^2 - 4x + 5 > 0$ が成り立つことを証明せよ。

背理法も対偶も使わず、式を平方完成するだけで直接示せる。

$$x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 - 4 + 5 = (x - 2)^2 + 1$$

$(x - 2)^2$ はどんな実数 x についても0以上なので、

$$(x - 2)^2 + 1 \geq 0 + 1 = 1 > 0$$

よってすべての実数 x について、

$$x^2 - 4x + 5 > 0 \text{ が成り立つ}$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。背理法を使いこなして、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

√3は無理数であることを証明せよ。(練習問題12で証明した「 n^2 が3の倍数ならば n は3の倍数である」を使ってよい)

結論を否定して、√3が有理数であると仮定する。

有理数であれば、これ以上約分できない(互いに素な)自然数 p, q を使って

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q}$$

と書ける。両辺を2乗すると

$$3 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 3q^2$$

右辺 $3q^2$ は3の倍数だから、 p^2 は3の倍数。練習問題12の結果により、 p は3の倍数である。そこで $p = 3k$ (k は自然数)とおいて代入すると

$$(3k)^2 = 3q^2 \Rightarrow 9k^2 = 3q^2 \Rightarrow q^2 = 3k^2$$

右辺 $3k^2$ は3の倍数だから、 q^2 も3の倍数。同じ結果により、 q も3の倍数である。

ところが p も q も3の倍数だと、両方とも3で割り切れてしまい、「 p, q は互いに素」という最初の設定に矛盾する。

矛盾が生じたのは、「√3が有理数である」と仮定したせいである。したがって、

√3は無理数である

応2

背理法の応用（有理数＋無理数）

a を有理数、 b を無理数とすると、 $a + b$ は無理数であることを証明せよ。

結論を否定して、 $a + b$ が有理数であると仮定する。

このとき

$$b = (a + b) - a$$

と書ける。 $a + b$ も a も有理数だと仮定しているので、右辺は「有理数－有理数」であり、その結果は有理数になる。

つまり b は有理数、ということになる。

しかしこれは「 b は無理数である」という最初の設定に矛盾する。

矛盾が生じたのは、「 $a + b$ が有理数である」と仮定したせいである。したがって、

$a + b$ は無理数である

応3

真偽判定（無理数どうしの和）

命題「実数 x 、 y がともに無理数ならば、 $x + y$ は無理数である」の真偽を答えよ。
また、真偽の判断に使える反例として、 $x + y$ の値を1つ答えよ。

真偽 偽 反例における $x + y =$ 0

$x = \sqrt{2}$ 、 $y = -\sqrt{2}$ はどちらも無理数だが、

$$x + y = \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$$

となり、0は有理数である。よってこの命題は反例が存在し、成り立たない。

偽（反例 $x = \sqrt{2}$ 、 $y = -\sqrt{2}$ のとき $x + y = 0$ ）

命題「実数 x が無理数、実数 y が有理数ならば、 xy は無理数である」の真偽を答えよ。また、反例として使える y の値を1つ答えよ。

真偽 偽 反例における $y =$ 0

$x = \sqrt{2}$ （無理数）、 $y = 0$ （有理数）とすると、

$$xy = \sqrt{2} \times 0 = 0$$

となり、0は有理数である。 $y = 0$ という特別な場合があるため、この命題は成り立たない。

偽（反例 $y = 0$ のとき $xy = 0$ ）

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ。($\sqrt{2}$ が無理数であることは証明済みとしてよい)

結論を否定して、 $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r$ (r は有理数) であると仮定する。

$\sqrt{3} = r - \sqrt{2}$ として、両辺を2乗する。

$$3 = (r - \sqrt{2})^2 = r^2 - 2r\sqrt{2} + 2$$

整理すると

$$2r\sqrt{2} = r^2 - 1$$

(1) $r \neq 0$ のとき

両辺を $2r$ で割ると

$$\sqrt{2} = \frac{r^2 - 1}{2r}$$

右辺は有理数どうしの計算結果なので有理数。つまり $\sqrt{2}$ が有理数ということになるが、これは「 $\sqrt{2}$ は無理数である」ことに**矛盾**する。

(2) $r = 0$ のとき

$\sqrt{2} + \sqrt{3} = 0$ 、すなわち $\sqrt{3} = -\sqrt{2}$ となるが、 $\sqrt{3} > 0$ 、 $-\sqrt{2} < 0$ なので、正の数と負の数が等しいことになり**矛盾**する。

(1) (2) のどちらの場合も矛盾するので、「 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ が有理数である」という仮定が誤りである。したがって、

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は無理数である